UNIVERSIDAD INCA GARCILASO DE LA VEGA

NUEVOS TIEMPOS, NUEVAS IDEAS

ESCUELA DE POSGRADO

DR. LUIS CLAUDIO CERVANTES LIÑÁN

TESIS

Aplicación de las Transformaciones algebraicas y el Logro de Aprendizaje del Cálculo I en los estudiantes del primer ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Presentado por:

Lic. Luis Leoncio Barboza Carape

Para optar el grado de Maestro en

Investigación y Docencia Universitaria

Asesora: Dra. Laura Esponda Versace

2017

DEDICATORIA

Con mucho amor a mi esposa Mónica y a mis queridos hijos Sebastián y Andrea que son mi mayor motivación.

Luis Barboza

AGRADECIMIENTOS

A los profesores de la Escuela de Posgrado de la Universidad Inca Garcilaso de la Vega por alentar mi interés en la Investigación y permitirme conocer más sobre la Docencia Universitaria.

A la Dra. Laura Esponda por su paciencia y dedicación en la asesoría para la realización de esta investigación.

Al Dr. Isidoro Ruiz por sus sugerencias a esta investigación y al Lic. Luis Milla por permitirme haber realizado la recolección de datos para esta investigación en su curso de Cálculo I.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

El objetivo general del trabajo de investigación fue establecer la influencia de la aplicación de las transformaciones algebraicas en el logro de aprendizaje de la asignatura de cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Mayor de San Marcos. El diseño utilizado fue de tipo pre experimental con un solo grupo.

Además como objetivos específicos fue establecer la influencia de los productos notables, la racionalización y factorización en el logro de aprendizaje de la asignatura de cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

La muestra fue no probabilística intencional estuvo constituida por 40 estudiantes del aula 102 de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Se encontró un alfa de Cronbach de 0,832, con la cual queda claro la alta confiabilidad del instrumento.

Se les aplicó un pre test de 10 preguntas objetivas de 5 alternativas para medir su rendimiento inicial, seguido de sesiones de enseñanza aprendizaje aplicando las transformaciones algebraicas antes de los tópicos del cálculo I. Finalmente se evaluó al grupo experimental con un post test para conocer los resultados.

Mediante el SPSS se calculó los estadísticos descriptivos de las evaluaciones del grupo, luego para contrastar la hipótesis se aplicó la prueba de Wilcoxon con rangos dado que uno de los test no era normal.

Los resultados mostraron que los logros de aprendizaje son mejores en el post test del grupo de investigación respecto del pre test. Quedó demostrado que las transformaciones algebraicas influyen positivamente

en el logro de aprendizaje del 82,5% de los estudiantes, de los cuales se ubican en el nivel avanzado el 32,5%.

Palabras claves: Productos notables, racionalización, factorización, transformaciones algebraicas, logro de aprendizaje del cálculo I.

ABSTRACT

The general objective of the research work was to establish the influence of the application of the algebraic transformations in the learning achievement of the subject of calculation I in the students of the I cycle of the Faculty of Engineering of Systems and Informatics of the Greater University of San Frames. The design used was of pre-experimental type with a single group.

In addition as specific objectives was to establish the influence of the notable products, rationalization and factorization in the learning achievement of the subject of calculation I in the students of the I cycle of the Faculty of Engineering of Systems and Informatics of the Greater University of San Frames.

The sample was intentional non-probabilistic was constituted by 40 students of classroom 102 of the Faculty of Engineering of Systems and Informatics of the Greater University of San Frames. . We found an alpha of Cronbach of 0,832, with which it is clear the high reliability of the instrument.

They were then given a pre-test of 10 objective questions from 5 alternatives to measure their initial performance, followed by teaching-learning sessions applying the algebraic transformations before the topics of calculation I. Finally, the experimental group was evaluated with a posttest to know the results.

Using the SPSS, the descriptive statistics of the group evaluations were calculated, then to test the hypothesis the Wilcoxon test was applied with ranges since one of the tests was not normal.

The results showed that the learning achievements are better in the post test of the research group than the pretest. It was demonstrated that the

algebraic transformations positively influence the learning achievement of 82.5% of the students, of which they are in the advanced level 32.5%.

Keywords: Notable products, rationalization, factorization, algebraic transformations, learning Calculus I.

INTRODUCCIÓN

En las experiencias relacionadas con la investigación no se puede dejar de lado hacer referencia a los procesos estadísticos que se requieren para obtener información relevante y analizar los resultados de la investigación. En esa línea el estudio denominado “Aplicación de las Transformaciones algebraicas y el Logro de Aprendizaje del Cálculo I en los estudiantes del primer ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos”, pretende establecer la influencia de la aplicación de las transformaciones algebraicas en el logro de aprendizaje del cálculo I.

Carbonero M., & Coromoto J. (2006) señalan que la educación matemática ayuda a promover la capacidad de abstracción, el razonamiento lógico, el análisis, la investigación y el espíritu crítico y científico de quien la estudia.

En principio este estudio se ha estructurado en cinco capítulos: Fundamentos teóricos de la Investigación, El Problema objetivos Hipótesis y Variables, Método Técnica e Instrumentos, Presentación y Análisis de los Resultados y por último Conclusiones y Recomendaciones seguido de la bibliografía y anexos.

El Capítulo I denominado Fundamentos Teóricos de la Investigación, se detalla el Marco Histórico, el Marco Teórico de la Investigación donde se argumentan las diversas posturas de especialistas en matemática, señalando sus características y bondades en el desarrollo de la enseñanza aprendizaje. De Guzman (1992) sostiene que la gestación de ideas debe estar direccionada en su búsqueda autónoma, en descubrir estructuras matemáticas sencillas que resuelvan situaciones de forma natural; y el Marco Conceptual donde se expone las definiciones de los términos empleados en este trabajo.

El Capítulo II denominado El Problema, Objetivos, Hipótesis y Variables; detalla la descripción de la Realidad Problemática entre otras afirmaciones que las pruebas PISA no miden el nivel de aprendizaje sino competencias realizadas en corto tiempo, la Definición del Problema, la Finalidad y Objetivos de la Investigación, los Objetivo General y Específicos, así como la Delimitación del Estudio, la Justificación e Importancia del Estudio, la Hipótesis y Variables estadísticas correspondientes.

El Capítulo III denominado Método, Técnica e Instrumentos, se definen población y muestra del estudio, el diseño tiene un enfoque cuantitativo, se explica la técnica e instrumento de recolección de datos que consistió en la misma prueba aplicada al inicio y final llamadas pre test y post test, terminando con el procesamiento de datos a través de la estadística descriptiva e inferencial.

El Capítulo IV denominado Presentación y Análisis de los Resultados, se detalla la totalidad de la información recogida y procesada los mismos que se explican en tablas y figuras debidamente organizados; luego desarrollamos la discusión de resultados concluyendo con la contrastación de las hipótesis para lo cual se han realizado la prueba de Wilcoxon con rangos, mediante el programa estadístico SPSS 22.

El Capítulo V llamado Conclusiones y Recomendaciones, se da a conocer que la transformación algebraica influye positivamente en el logro de aprendizaje de la asignatura del cálculo I en los estudiantes de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, señalando también sugerencias viables a considerar.

Por último, las referencias bibliográficas y los anexos, el autor considera que el estudio de esta investigación requiere profundizar la exploración de otros aspectos vinculados con la estructuración de la asignatura del cálculo I, invito a la comunidad matemática en conjunto a seguir aportando en beneficio de nuestra sociedad.

CAPÍTULO I: Fundamentos Teóricos de la Investigación

1.1 Marco Histórico

Transformaciones Algebraicas

Los orígenes de los componentes del álgebra se remontan a unos 2000 años A.C. por evidencias encontradas en el mundo árabe sobre las soluciones de algunos tipos de ecuaciones cuadráticas. Fueron los árabes quienes denominaron a la nueva ciencia *al jabr*, que en buena cuenta quiere decir "reducción". Luis Puig (1998) refiere que hubo muchos aportes desde los clásicos griegos, pero que fue del título del libro de Al Jhwarizmi "*Cálculo de Al- jabr*" que se toma el nombre de álgebra que se hizo muy popular por la Europa académica hasta nuestros tiempos.

En el libro de historia de las matemáticas se menciona que los egipcios fueron uno de los primeros que aportó en el desarrollo del álgebra con evidencias de repartición de suministros, cosechas, materiales a través de ecuaciones lineales llamadas el método de la falsa suposición referencias encontradas en los papiros de Rhind. Collette, J.P. (1985).

Posteriormente aportaron al desarrollo del álgebra matemáticos griegos, hindúes y europeos dedicados a encontrar soluciones de ecuaciones de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, *de tercer grado* $ax^3+bx^2+cx+d=0$ y ecuaciones de grados superiores. Entre otros mencionamos a Herón y Diofanto de Alejandría, Leonardo de Pisa, Johann Widman, Tartaglia, Gerolamo Cardamo, Francois Viete, René Descartes, Gabriel Cramer, Carl Gauss, Robert Argand entre muchos otros.

Los primeros indicios del lenguaje simbólico se encuentran en el libro de Al Jhwarizmi "*Cálculo de Al- jabr*" pero que no tienen que ver con el sistema matemático de signos (SMS) puesto que por ejemplo se expresan los términos de la ecuación cuadrática como "tesoros" y "raíces" que podríamos considerar como moldes formales (Puig,1998).

No cabe duda que la idea de la factorización surge por la necesidad de descomponer a los números compuestos en sus factores primos, por lo que se le reconoce como una herramienta para “transformar” las expresiones algebraicas en soluciones de problemas del contexto. Nalda U. (2014) en su trabajo de *Factorización* señala como primer algoritmo la división por tentativa por la sencillez e intuición que se puede usar, menciona a Pierre Fermat y su aporte de la diferencia de cuadrados, a Leonardo Euler por su contribución en la descomposición de los números.

Shirley J.W. (1974) menciona que Thomas Harriot utilizaba tablas para modelar la suma, resta, división de monomios, binomios, y trinomio mostrando una multiplicación más directa que facilita su método de factorización. En la actualidad todos los aportes a las transformaciones algebraicas han permitido la formalización de métodos de factorización que facilitan la resolución de una diversidad de situaciones problemáticas del contexto diario.

Logro de aprendizaje del Cálculo

Al paso del tiempo y en diversidad de universidades se ha implementado múltiples sistemas de evaluación que permitan medir el logro de los aprendizajes de los estudiantes universitarios. El sistema tradicional evalúa contenidos a través de exámenes con valoraciones cuantitativas sin considerar otros aspectos importantes de los estudiantes. Posteriormente se utilizaba la taxonomía de Bloom dividiendo los conocimientos en seis niveles justificando de alguna forma la adquisición conductista. Luego, dentro del enfoque constructivista se implementaron ideas como el aprendizaje significativo, el aprender haciendo, el aprendizaje basado en problemas, el uso de instrumentos de evaluación con el objeto de mejorar el sistema de enseñanza aprendizaje y en particular en las matemáticas.

Asumiendo que las notas obtenidas en las evaluaciones reflejan los logros académicos entonces las notas son los indicadores que avalan el logro alcanzado valorando el rendimiento académico, Rodríguez &Fita & Torrado (2004).

Vargas, G. M. G. (2007) señala que el rendimiento académico es un factor imprescindible y primordial para la valoración de la calidad educativa a nivel superior. Además, el 2000, Pérez, Ramón, Sánchez (cit. Por Vargas, 2007) afirman que “el rendimiento académico es la suma de diferentes y complejos factores que actúan en la persona que aprende, y ha sido definido con un valor atribuido al logro del estudiante en las tareas académicas”.

Rosas, N. C., & Oliveros, E. (2014), refieren que por la complejidad de la matemática muchos estudiantes no llegan a comprender bien algún tema matemático, lo que origina vacíos, inseguridad y rechazo al curso; condicionando a los maestros a tener dificultades en la evaluación y como consecuencia bajas calificaciones en el logro de aprendizaje.

El descubrimiento del cálculo se atribuye a Sir Isaac Newton y Gottfried Leibniz quienes independientemente unos del otro generalizaron y unificaron los conceptos matemáticos. Leithold (1998). El cálculo comprende:

- ✓ Teoría de funciones
- ✓ Límites de una función
- ✓ La Derivada
- ✓ Aplicaciones de la derivada
- ✓ Integrales
- ✓ Aplicaciones de la integral
- ✓ Técnicas de integración
- ✓ Ecuaciones diferenciales de primer orden
- ✓ Sucesiones y series
- ✓ Cónicas y coordenadas polares
- ✓ Vectores y espacio tridimensional
- ✓ Funciones de valores vectoriales
- ✓ Derivadas parciales

- ✓ Integrales múltiples
- ✓ Cálculo integral vectorial
- ✓ Ecuaciones diferenciales de orden superior

Aucallanchi F. & Medina M. (2012), mencionan que el término rendimiento académico queda definido y usado como un indicador del desarrollo de los estudiantes. Los niveles establecidos son analizados a través del tránsito de inicial a experimentados sobre la base de los indicadores de calidad de los conocimientos asimilados.

Finalmente, Reynaga O. & Ruiz I. (2014), señalan que el rendimiento matemático es un tema extensamente investigado, con una complejidad de su conceptualización ya que otros autores lo señalan como "aptitud académica", desempeño académico" o como "rendimiento académico", sin embargo, estas diferencias no son del todo equivalentes y pueden causar confusiones.

1.2 Marco Teórico

Transformaciones Algebraicas

Aufmann R., Lakewood J. (2013) señalan que la matemática tiene 4000 años de antigüedad, pero que sólo hace 400 años los matemáticos usamos variables para representar a los números. Con frecuencia indicamos valores aproximados para referirnos al costo de un auto el próximo año, el costo de un barril del petróleo o al precio del cobre. En el álgebra se acostumbra usar letras del alfabeto para representar a las cantidades, por ejemplo, sea *x* el precio de un barril del petróleo.

Como sabemos el álgebra tiene como objetivo primordial analizar las operaciones que intervienen en los procesos de resolución de problemas estableciendo conexiones a través de símbolos numéricos o alfanuméricos. Las transformaciones algebraicas se refieren a todo tipo de operaciones que involucran las expresiones algebraicas.

***Expresiones algebraicas*.**

La combinación de letras y números es llamada expresión algebraica, por ejemplo, tenemos:

$$4x^2 + 15xy^2 - 5$$

$$\frac{5x^2}{3} + \sqrt{x}z^2 - 5z + 15$$

Término algebraico: Es una expresión algebraica formada por el producto de letras (parte literal) y números (coeficiente), por ejemplo:

$$\underset{\downarrow}{23}x^4y^3 \longrightarrow \text{Parte literal}$$

Coeficiente

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). Señalan que un ***monomio*** es una expresión algebraica de la forma $a\,x^k$ donde *a* en un número real y *k* un entero no negativo. Agregan que la suma de dos monomios es la expresión algebraica llamada ***binomio***, que la suma de tres monomios es la expresión algebraica llamada ***trinomio*** y que en general la suma de los monomios se llama ***polinomio***.

A menudo se utilizan pequeñas transformaciones algebraicas para determinar su valoración, por ejemplo: Si a=5 y b=4 entonces:

- ✓ El monomio ab^2 resulta igual a: $(5)(4)^2=80$
- ✓ El binomio a^2-b^2 resulta igual a: $5^2-4^2=25-16=9$
- ✓ El trinomio $a^2+2ab+b^2$ resulta igual a: $5^2+2.5.4+4^2=81$

Polinomios: “Un polinomio en la variable x es una expresión de la forma:

$$a_n\,x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio tiene **grado n**. Los monomios $a_k\,x^k$ que conforman el polinomio reciben el nombre de **términos** del polinomio”, Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012, pág.24).

Es importante mencionar que en los polinomios se debe distinguir al *término principal* que es el término de grado más alto y al coeficiente principal que es el coeficiente del término principal.

Ejemplos de polinomios:

Polinomio	Tipo	N° de términos	Grado	Término principal
$4x^5$	Monomio	1	5	$4x^5$
$3x^2y^3+5x^4y^5$	Binomio	2	9	$5x^4y^5$
$-2x^3z^4+3x^2yz^3+4x^3y^5$	Trinomio	3	8	$4x^3y^5$

Fuente: Elaboración Propia

En el caso del binomio si x=3 y y=2 entonces el valor numérico correspondiente es: $3(3)^2(2)^3+5(3)^4(2)^5=13176$. Ahora bien, si la expresión $x^3+3x^2-2x+12$ lo colocamos como $P(x)= x^3+3x^2-2x+12$ tenemos una función polinomial, lo que significa que en una función polinomial, la expresión describe un polinomio refiere Angel, A. R., & Runde, D. C. (2011, pág.281).

El valor numérico de la función polinomial $P(x)= x^3-4x^2+12x-2$ para x=0 resulta $P(0)=(0)^3-4(0)^2+12(0)-2=-2$ y para x=2 resulta $P(2)=(2)^3-4(2)^2+12(2)-2=14$. Para simplificar las expresiones algebraicas sus términos deben ser semejantes, los *términos son semejantes* cuando tienen las mismas partes literales, refiere Aufmann R. & Lockwood J. (2013). Los términos $7x^2$ y $12x^2$ son términos semejantes porque tienen la misma parte literal.

Por ejemplo, para simplificar la siguiente expresión: $4x^3-6x^3+4x^3$ hacemos uso de la propiedad distributiva de los números reales, es decir $4x^3-6x^3+4x^3 = (4 – 6 + 4)\ x^3 = 2x^3$.

Productos notables

Como parte de las transformaciones algebraicas se procesan multiplicaciones de expresiones algebraicas, como por ejemplo (2x+3) (x-2). Para efectuarlas usamos la propiedad distributiva de los números reales, es decir:

$$(2x+3)\ (x-2) = (2x)\ (x-2) + 3(x-2) = 2x^2-4x+3x-6$$

que reducida resulta $2x^2-x-6$.

Otro ejemplo $(2x^2-x+3)\ (x+4) = (2x^2-x+3)\ (x) + (2x^2-x+3)\ (4)$

$$= 2x^2(x)-x(x)+3(x) + 2x^2(4)-x\ (4)+3(4)$$

$$= 2x^3-x^2+3x+8x^2-4x+12$$

$$=2x^3-7x^2+-x+12$$

Carreño X. & Cruz X. (2006) sostienen que dentro de la multiplicación algebraica hay productos que pueden desarrollarse en forma directa, cuadrado de un binomio, suma por diferencia, producto de binomio con término común, cubo de binomio, etc.

Aufmann R. & Lockwood J. (2013) sostienen que luego de abordar el método PEIU (Primero, Exterior, Interior, Último) se encuentran patrones para algunos productos como por ejemplo suma y diferencia de dos términos, cuadrado de un binomio.

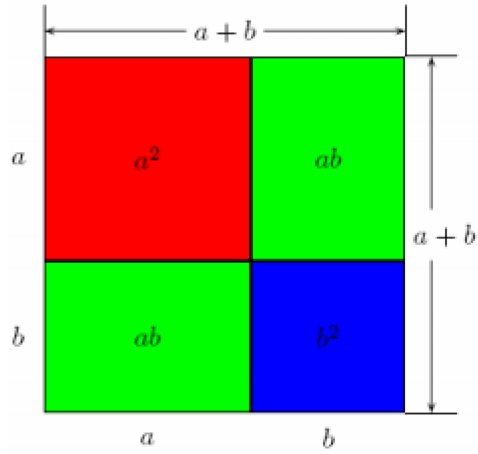
Estas transformaciones algebraicas (forma directa, patrones) permiten agilizar los cálculos, lográndose resultados en el menor tiempo posible cuando son efectuados con asertividad y propiedad. El uso adecuado de los productos notables nos permitirá calcular límites de funciones, derivadas, los valores máximos y mínimos de una función, etc. Entre otros tenemos:

Caso	Productos Notables
Producto de la suma por diferencia	$(a + b)\ (a-b) = a^2 – b^2$
Producto de binomios con término común	$(x +a)\ (x +b) = x^2+x\ (a +b) + ab$
Cuadrado de la suma	$(a + b)^2=a^2 + 2ab + b^2$
Cuadrado de la diferencia	$(a-b)^2=a^2 - 2ab + b^2$
Cubo de la suma	$(a + b)^3=a^3 +3a^2b+ 3ab^2 + b^3$
Cubo de la diferencia	$(a - b)^3=a^3 -3a^2b+ 3ab^2 - b^3$

Fuente: Elaboración Propia

Barreto, J. C. (2009, pág. 61) en base a construcciones geométricas y uniendo las figuras como que fueran piezas de un rompecabezas al que llama *aprehensión operativa de reconfiguración* demuestra el desarrollo de un binomio al cuadrado.

Figura N°1: Binomio al cuadrado

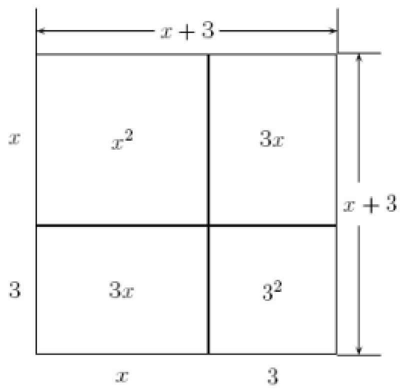


Fuente: Revista Número, volumen 71 página 61

Queda claro que el área del cuadrado es (a + b) (a + b) = $(a + b)^2$, como puede observarse en la figura 1. El cuadrado rojo tiene área a^2, el cuadrado azul tiene área b^2 y los rectángulos verdes tienen área ab.

Por ejemplo, el producto notable $(x+3)^2$ cuyo desarrollo es x^2+6x+9 se expresa como:

Figura N°2: Ejemplo de binomio al cuadrado



Fuente: Revista Número, volumen 71 página 62

Factorización

A lo largo de la historia para quienes gustamos de la matemática siempre fue un tema apasionante investigar sobre la teoría de los números primos. Muchos connotados matemáticos entre otros Marin Mersenne en el siglo XVII, Lucas en 1877, Robinson en 1958, Hurwitz y Selfridge en 1961, Bryan Tuckerman en 1971, David Slowinski en 1994 dedicaron años de su vida en descubrirlos y encontrar una fórmula general que determine a todos los números primos refiere Ruiz I. (1999, pág. 146).

Nalda, Urko (2014) señala que cuando aparecieron los forjadores de los números primos se interesaron en descomponer a los números compuestos en los números primos que lo forman, esta actividad de colocar a los números en sus factores primos es conocido como *factorización.*

A través del tiempo se sabe que hubo muchos aportes para calcular a los números primos, como por ejemplo la criba de Eratóstenes (270 años A.C.), Pierre Fermat por 1640 ya hablaba de $N = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Johann Rahn en 1659 publicó una tabla con factores primos, John Pell en 1968 extendió la tabla de Rahn, hasta que en los tiempos “modernos” se utilizaba las máquinas para determinar la cantidad de factores primos que tienen los números.

Cuando hablamos de los productos notables buscamos una forma rápida de encontrar el resultado de una multiplicación de polinomios, ahora nos interesa colocar una expresión algebraica como una multiplicación de polinomios.

Definición:

Si un polinomio resulta el producto de otros polinomios entonces cada uno de los polinomios del producto resulta un *factor*, *factorizar* es el proceso de colocar una expresión algebraica como un producto refiere Swokowski, E. W. (2011).

Larson, R. (2011) señala que cuando se factoriza un polinomio y no se indique el campo numérico de aplicación se sobreentiende que buscamos coeficientes enteros, ahora bien, si el polinomio no puede ser factorizado usando coeficientes enteros, entonces es *primo* o *irreductible* sobre los enteros.

Esta aclaración es fundamental, por ejemplo, en el campo de los enteros $x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$ cada uno de los factores "*x + 4*" y "*x - 4*" son primos ya que no hay forma de expresarlos usando coeficientes enteros. En el caso del polinomio $x^2 - 6$ ya es irreductible en el campo de los enteros y racionales; sin embargo, que en el campo de los números reales es factorizable ya que $x^2 - 6 = (x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})$. Lo que implica que es imprescindible señalar el campo numérico donde se realiza la factorización.

Leithold, L. (2007) señala que un polinomio con coeficientes enteros es primo cuando no tiene factores monomios o polinomios con excepción de sí mismo y la unidad, además estará completamente factorizada cuando cada uno de sus factores polinomiales es primo. Es decir, el caso $x^3 + x^2 + 3x + 3 = (x+1)(x^2+3)$ está completamente factorizado; en cambio el caso $x^3 + x^2 - 9x - 9 = (x+1)(x^2-9)$ no está completamente factorizado. La forma de la factorización completa sería $x^3 + x^2 - 9x - 9 = (x+1)(x+3)(x-3)$.

La factorización es un proceso importante en matemáticas, ya que una expresión complicada se puede colocar en función de otras más simples. Por ejemplo, $5x^3 + 6x^2 - 29x - 6 = (5x+1)(x-2)(x+3)$. La factorización es muy útil para las simplificaciones de expresiones racionales y la resolución de ecuaciones. En el campo de números racionales entre otros casos tenemos:

Factor común monomio

Si todos los términos de un polinomio contienen un factor común, entonces según la ley distributiva el polinomio se puede escribir como el factor común y el cociente obtenido al dividir el polinomio original entre el factor común refiere Leithold, L. (2007).

Por ejemplo, en el caso: $abx^2 - acx$ el factor común es ax entonces quedaría factorizado como $abx^2 - acx = ax(bx - c)$, otros ejemplos:

$$6x^3 + 2x^2 + 8x = 2x(3x^2 + x + 4)$$

$$6x^4y^4 - 4x^2y^2 + 10xy^3 - 2xy^2 = 2xy^2(3x^3 - 2x + 5y - 1)$$

Fuente: Elaboración propia

Factor común polinomio

Es el caso donde el factor común es un polinomio que se repite como factor en cada uno de los términos del polinomio original. Por ejemplo, tenemos:

$$y^2(x + y - z) + m^2(x + y - z)=(x + y - z)(y^2+m^2)$$

$$x^4(2a-5b) + x(2a-5b)-5(2a - 5b)=(2a-5b)(x^4+x-5)$$

$$a(a + b - c) + c(a + b - c) + b(a + b - c)=(a + b - c)(a+c+b)$$

Fuente: Elaboración propia

Factor común por agrupación de términos

Es el caso cuando todos los términos de un polinomio no tienen la misma parte variable, entonces se agrupa los términos que si lo tienen y se hallan los respectivos factores comunes. Por ejemplo:

1) $m^2y^2-7xy^2 + m^2z^2-7xz^2 = m^2(y^2 + z^2) - 7x(y^2 + z^2)$
$= (y^2 + z^2)(m^2 - 7x)$

2) $7mnx^2-5y^2-5x^2 + 7mny^2 = 7mn(x^2 + y^2) - 5(x^2 + y^2)$
$= (x^2 + y^2)(7mn - 5)$

3) $x^2m^2-13y^2n-x^2n + 13y^2m^2 = x^2(m^2 - n) + 13y^2(m^2 - n)$
$= (m^2 - n)(x^2 + 13y^2)$

Fuente: Elaboración propia

Factorización de formas notables

Estos casos derivan de los productos notables y resultan los siguientes:

Diferencia de cuadrados

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ Ejemplo:

$$16x^2 - 9 = (4x)^2 - 3^2$$
$$= (4x+3)(4x-3)$$

$$25x^2 - 16y^2 = (5x)^2 - (4y)^2$$
$$= (5x+4y)(5x-4y)$$

Fuente: Elaboración propia

Trinomio cuadrado perfecto

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ Ejemplo:

$$25 + 20x + x^2 = 5^2 + 2(5)(x) + x^2$$
$$= (5+x)^2$$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ Ejemplo:

$$4m^2 + 20mx + 25x^2 = (2m)^2 + 2(2m)(5x) + (5x)^2$$
$$= (2m+5x)^2$$

Fuente: Elaboración propia

Suma o diferencia de cubos

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Ejemplo:

$$64x^3 + 27y^3 = (4x)^3 + (3y)^3$$
$$= (4x+3y)(16x^2 - 12xy + 9y^2)$$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Ejemplo:

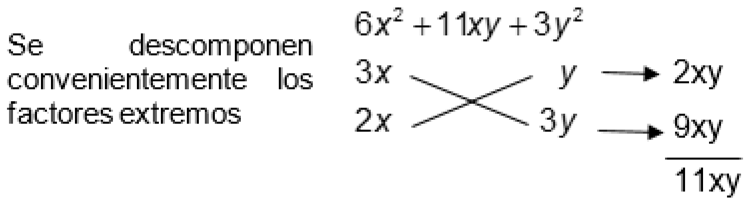
$$125x^3 - 64y^3 = (5x)^3 - (4y)^3$$
$$= (5x-4y)(25x^2 + 20xy + 16y^2)$$

Fuente: Elaboración propia

Aspa simple

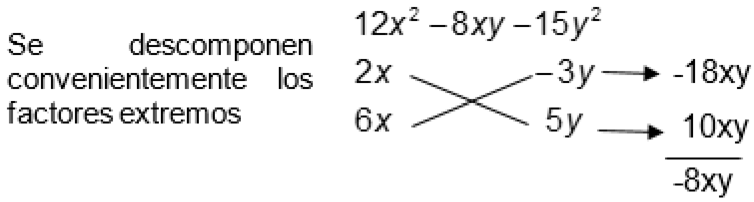
Es el caso donde se pueden factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bxy + cy^2$, bajo el siguiente esquema:

Ejemplo (1):



Fuente: Elaboración propia

Ejemplo (2):



Fuente: Elaboración propia

Racionalización

En una expresión racional de la forma $\frac{A}{B}$, a veces se presentan casos donde A y por lo general B viene expresados en forma irracional por $\sqrt[n]{A}$ lo que motiva hacer una transformación algebraica para su simplificación. Nos interesa estudiar los siguientes casos: $\frac{1}{\sqrt[n]{A^m}}$, $\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$ y $\frac{1}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}$.

Carreño X. & Cruz X. (2006) definen el proceso de racionalización para una fracción $\frac{A}{B}$ donde el denominador es un término irracional (raíz irreductible) en otra fracción equivalente cuyo denominador es un término racional, es decir no contiene raíz.

Swokowski, E. W. (2011) indica que a veces es deseable cambiar las expresiones para simplificarlas, sin embargo hay casos en el cálculo que cambiarlos podría hacer el problema más complicado. Por tanto, es recomendable tener cuidado. Entre otros casos tenemos:

Con una única raíz cuadrada

Para eliminar el radical es conveniente multiplicar el numerador y denominador por la raíz que aparece en el denominador, es decir:

$$\frac{A}{\sqrt{B}}=\frac{A\sqrt{B}}{\sqrt{B}.\sqrt{B}}=\frac{A\sqrt{B}}{(\sqrt{B})^2}=\frac{A\sqrt{B}}{B}$$

Por ejemplo:

1) $\frac{5}{\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{7}.\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2}=\frac{5\sqrt{7}}{7}$

2) $\frac{5}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}.\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$

3) $\sqrt{\frac{7}{5}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7.5}}{(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{35}}{5}$

Fuente: Elaboración propia

Con una única raíz n-ésima

En este caso si el exponente del radicando es ***m*** se multiplica numerador y denominador por la raíz n-ésima del radicando elevado a ***n-m***.

$$\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}=\frac{A.\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^m}.\sqrt[n]{B^{n-m}}}=\frac{A.\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^m.B^{n-m}}}=\frac{A.\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{m+n-m}}}=\frac{A.\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^n}}=\frac{A.\sqrt[n]{B^{n-m}}}{B}$$

Por ejemplo:

1) $\frac{2}{\sqrt[4]{3^3}}=\frac{2.\sqrt[4]{3^{4-3}}}{\sqrt[4]{3^3}.\sqrt[4]{3^{4-3}}}=\frac{2.\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3^{3+1}}}=\frac{2.\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3^4}}=\frac{2.\sqrt[4]{3}}{3}$

2) $\frac{5m}{\sqrt[5]{ab^2m^3}}=\frac{5m\sqrt[5]{(ab^2m^3)^4}}{\sqrt[5]{ab^2m^3}.\sqrt[5]{(ab^2m^3)^4}}=\frac{5m\sqrt[5]{a^4b^8m^{12}}}{\sqrt[5]{a^5b^{10}m^{15}}}=\frac{5mbm^2\sqrt[5]{a^4b^3m^2}}{ab^2m^3}$

$=\frac{5\sqrt[5]{a^4b^3m^2}}{ab}$

Fuente: Elaboración propia

Denominador con binomios

En este caso cuando el denominador es un binomio con radical de índice dos, se eliminan los radicales del denominador multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador. Es decir, haremos uso del producto notable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Recuerde que *a+b* y *a-b* son conjugados.

Por ejemplo:

1) $$\frac{2}{3+\sqrt{2}}=\frac{2.(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2}).(3-\sqrt{2})}=\frac{2.(3-\sqrt{2})}{3^2-\sqrt{2}^2}=\frac{2.(3-\sqrt{2})}{7}$$

2) $$\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(x-y).(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y}).(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{(x-y).(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{y}^2}$$

$$=\frac{(x-y).(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x-y)}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

3) $$\frac{5}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}=\frac{5.\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3-\sqrt{2}}.\sqrt{3-\sqrt{2}}}=\frac{5.\sqrt{3-\sqrt{2}}}{3-\sqrt{2}}=\frac{5.\sqrt{3-\sqrt{2}}.(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2}).(3+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{5.\sqrt{3-\sqrt{2}}.(3+\sqrt{2})}{3^2-\sqrt{2}^2}=\frac{5}{7}.\sqrt{3-\sqrt{2}}.(3+\sqrt{2})$$

Fuente: Elaboración propia

Logro de aprendizaje del Cálculo

Teorías de aprendizaje

De acuerdo a las últimas evaluaciones PISA el Perú ocupa uno de los últimos lugares en el desarrollo de habilidades matemáticas y esta realidad es transversal a muchos países porque los resultados señalan rendimientos por debajo de lo esperado.

De Guzmán (2007), citado por Santaolalla (2009) señalaba que “es necesario romper, con todos los medios, la idea preconcebida, y fuertemente arraigada en nuestra sociedad, proveniente con probabilidad de bloqueos iniciales en la niñez de muchos, de que la matemática es necesariamente aburrida, abstrusa, inútil, inhumana y muy difícil”.

La mayoría de estudiantes fracasan en matemática por cuestiones afectivas, emocionales y por influencia de los padres o maestros que condicionaron el desarrollo de sus habilidades a los estilos de aprendizaje al que ellos estaban acostumbrados. Ante esta situación nos preguntamos ¿cuál es el mejor estilo de aprendizaje?

En cuanto al aprendizaje, Schunk, D. H. (2012) señala que la mayor parte de los estudios se refiere a teorías cognoscitivas o cognitivas, que todas se parecen porque afirman que el aprendizaje implica cambios en el conocimiento, las habilidades y las creencias, también que los aprendices construyen su conocimiento y sus creencias no necesariamente de forma automática.

Shuel (1986) citado por (Schunk, p.3, 2012) menciona que no existe una definición de aprendizaje de consenso aceptada por todos. Sin embargo, Schunk (2012) lo define como “el aprendizaje es un cambio perdurable en la conducta o en la capacidad de comportarse de cierta manera, el cual es resultado de la práctica o de otras formas de experiencia”. Entre los criterios más importantes para entender el aprendizaje Schunk considera:

- ✓ El aprendizaje implica un cambio
- ✓ El aprendizaje perdura a lo largo del tiempo
- ✓ El aprendizaje ocurre por medio de la experiencia.

El conductismo

Como lo señalan muchos psicólogos John Watson (1878-1958) es el principal fundador y defensor del conductismo moderno, la idea era adoptar una estructura parecida al de la Física que sea observable y medible. Watson (1924) citado por Schunk (2012) señalaba que los psicólogos debían estudiar la conducta.

Dentro del conductismo destacan las siguientes teorías:

El conexionismo

Tiene como máximo representante a Edward Thorndike (1874-1949). Hilgard, 1996; McKeachie, 1990 citado por (Schunk, 2012) señalan que “a diferencia de muchos psicólogos pioneros, él estaba interesado en la educación, en especial en el aprendizaje, la transferencia, las diferencias individuales y la inteligencia”.

Schunk (2012) sostiene que el mayor aporte de Thorndike a la educación es el *aprendizaje por ensayo error* que implica la conexión entre las experiencias sensoriales y los impulsos que se manifiestan en conducta, así un adulto posee millones de conexiones *estímulo-respuesta*.

Condicionamiento clásico

El representante natural de la teoría de aprendizaje llamado *condicionamiento clásico*, es sin duda Iván Pavlov (1849-1936), quién observó el efecto que provocaba su asistente al llevarle comida a su perro.

Schunk (2012) considera que el condicionamiento clásico es un proceso que comienza con un *estímulo incondicionado* (EI) que provoca una *respuesta incondicionada* (RI), en las personas el condicionamiento ocurre cuando el individuo es consciente que hay una relación entre el *estímulo condicionado* (EC) y el EI y que el EI no ocurre después del EC. Hollis 1997 citado por (Schunk, 2012) sostiene que “el condicionamiento depende de la compatibilidad del estímulo y la respuesta con las reacciones específicas de las especies”.

Condicionamiento por contigüidad

El representante de esta teoría de aprendizaje fue Edwin Guthrie (1886–1959), quién sostenía principios de aprendizaje basados en asociaciones, entre otras conductas señalaba los actos y los movimientos.

Guthrie, 1959 citado por (Schunk, 2012) habla sobre la contigüidad entre estímulos y respuestas, la combinación de estímulos provoca movimientos que tiendes a ser repetidos y provocar dicha respuesta, además de ser aplicable a la memoria por ejemplo las señales verbales se relacionan con estímulos o eventos en el momento del aprendizaje.

Schunk (2012) sostiene que la teoría de Guthrie no incluye procesos cognoscitivos por lo que no es usado en la actualidad, sin embargo sus aportes sobre modificación de hábitos son inspiradoras y ayudan a que las personas desarrollen mejores hábitos.

Condicionamiento Operante

El representante de esta teoría de aprendizaje es sin duda Burrhus Frederic Skinner (1904-1990), entre sus aportes están la disciplina escolar, el desarrollo infantil, la adquisición del lenguaje la conducta social, la enfermedad mental y la orientación vocacional.

Skinner (1953) señalaba que el aprendizaje es la reclasificación de las respuestas en una situación compleja. Refiere condicionamiento al fortalecimiento de la conducta (reforzamiento), la conducta operante es algo así como “aprender haciendo” que actúa en un ambiente determinado.

Schunk (2012) señala que los procesos básicos del condicionamiento operante son: reforzamiento, extinción, reforzadores primarios y secundarios, principio de Premack, castigo, programas de reforzamiento, generalización y discriminación; además señala como modelo básico del condicionamiento operante una contingencia de tres términos que incluye un estímulo discriminativo (antecedente), una respuesta (conducta) y un estímulo reforzante (consecuencia).

Constructivismo

Bruning, 2004 citado por (Schunk, 2012) señala que el constructivismo es una perspectiva psicológica y filosófica donde las personas construyen gran parte de lo que aprenden. Los representantes más sobresalientes de esta teoría son sin duda Piaget y Vygotsky.

Schunk (2012) sostiene que el constructivismo recomienda que los profesores desaprendan la forma tradicional de instruir, y que por el contrario estructuren la participación activa de los estudiantes manipulando materiales y fomentando la interacción social.

En tiempos actuales como parte del constructivismo se incluyen actividades para el aprendizaje activo como recolección de datos, investigación, desarrollo de proyectos, aprendizaje basado en problemas, la generación y pruebas de hipótesis y el trabajo colaborativo.

Teoría de Piaget en el desarrollo cognoscitivo

La teoría de Piaget es compleja y se enfoca en el desarrollo cognoscitivo humano que depende de cuatro factores: la madurez bilógica, la experiencia en el ambiente físico, la experiencia con el entorno social y el equilibrio señala Schunk (2012).

El equilibrio

Duncan, 1995 citado por (Schunk, 2012) refiere que el equilibrio es un impulso biológico que produce un estado óptimo de adaptación entre las estructuras y el ambiente.

La asimilación

Es el ajuste de la realidad externa a una estructura cognoscitiva ya existente. Por ejemplo, cuando parafraseamos textos de otros autores, interpretamos y buscamos encuadrarlos dentro de la estructura cognoscitiva que ya tenemos.

La acomodación

Cambia las estructuras internas para equilibrarlas con la realidad externa. Por ejemplo, acomodamos cuando adaptamos nuestras ideas para darle sentido a la realidad.

Etapas

Piaget plantea cuatro etapas para el desarrollo cognoscitivo humano, las etapas son separadas y cualitativamente diferentes. La edad en la que se pasa de una etapa a otra varía de una persona a otra.

Schunk (2012) considera:

- ✓ Etapa *sensoriomotriz*, cuando las acciones de los niños son espontáneas e intentan entender al mundo. Va desde 0 a 2 años.

- ✓ Etapa *preoperacional*, los niños imaginan el futuro y reflexionan sobre el pasado, aunque siempre viven su presente. Va desde los 2 a 7 años.
- ✓ Etapa de *operaciones concretas*, se caracteriza por el significativo crecimiento del lenguaje y el desarrollo de habilidades básicas, empiezan a entender lo abstracto. Comprenden la reversión, clasifican, forman series.
- ✓ Etapa de *operaciones formales*, se amplía las operaciones concretas, los niños ya piensan en situaciones hipotéticas, múltiples dimensiones y en propiedades abstractas, desarrollan su capacidad de razonar.

La teoría de Piaget es constructivista ya que supone que los niños determinan sus propios conceptos sobre el mundo para darle sentido, Byrnes, 1996 citado por (Schunk, 2012). Los niños entienden el ambiente que los rodea y construyen la realidad con base en sus capacidades actuales.

Teoría sociocultural de Vygotsky

La teoría de Vygotsky, también es una constructivista y da mayor importancia al entorno social como facilitador del desarrollo humano y del aprendizaje. Tudge y Scrimsher, 2003 citados por (Schunk 2012) sostienen que Vygotsky destaca la interacción de factores interpersonales, históricos-culturales y los individuales como clave para el desarrollo humano.

Es decir, los aspectos históricos-culturales de Vygotsky ilustran que el aprendizaje se correlaciona con el contexto donde se desarrolla la actividad. Schunk (2012) señala que el postulado de Vygotsky es un constructivismo dialéctico ya que se basa en la interacción de las personas y su contexto social.

Karpov y Haywood, 1998 citados por (Schunk, 2012) sostienen que todos los procesos mentales superiores son mediados por herramientas psicológicas como el lenguaje, los signos, los símbolos; los adultos enseñan a los niños éstas herramientas y se da la socialización.

Zona de desarrollo próximo (ZDP)

Vygotsky (1978) lo define como “la distancia entre el nivel actual del desarrollo, determinada mediante la solución independiente de problemas, y el nivel de desarrollo potencial, determinado por medio de la solución de problemas bajo la guía adulta o en colaboración con pares más capaces”.

Schunk (2012) considera que generalmente la ZDP se refiere a nuevas formas de conciencia en la medida que de las personas interactúan con sus instituciones sociales, la cultura influye en el propio desarrollo mental.

Por ejemplo, cuando se controlan los elementos de las tareas que superan las capacidades de los estudiantes con la idea de que se concentren y dominen los aspectos de la tarea que captan con rapidez, algunos autores lo llaman *andamiaje instruccional*.

En el contexto actual del desarrollo de la matemática un concepto fundamental del aprendizaje es la competencia matemática que se define como

> “Un saber actuar deliberado y reflexivo que selecciona y moviliza una diversidad de saberes, habilidades, conocimientos matemáticos, destrezas, actitudes y emociones, de tal manera que permita plantear y resolver situaciones problemáticas reales o de contexto matemático, elaborar procesos de razonamiento, demostración y comunicación matemática que involucran conocimientos referidos a números y operaciones, cambio y relaciones, geometría; y, estadística y probabilidad” Minedu (2013).

Es decir, la competencia se refiere a la actitud (saber actuar) que debe tener el estudiante para tomar decisiones y resolver situaciones problemáticas en los diferentes contextos donde se está desarrollando.

El logro académico de los estudiantes universitarios es un indicador primordial que refleja el valor de la calidad de la educación. Además, mediante las evaluaciones obtenidas con una valoración cuantitativa se mide las materias ganadas o perdidas, la deserción y el grado de éxito, refieren Pérez, Ramón, Sánchez (2000), Vélez, Roa (2005) citado por (Vargas, 2007).

En particular, se puede afirmar que el aprendizaje del cálculo y por la autonomía que gozan las universidades cada una de ellas evalúan con diferentes criterios a través de tareas, proyectos de investigación, prácticas calificadas, examen parcial y examen final a quienes se les pondera para obtener el promedio final de la asignatura. Se entiende que la nota aprobatoria obtenida debe reflejar la adquisición de las competencias que exige la asignatura y el número de créditos asignados.

Vargas, G.M.G. (2007) señala que el logro académico establece una estrecha relación entre lo que se aprende y la nota obtenida (resultado de la suma de las diferentes actividades académicas del ciclo) observando que sus efectos diferenciales van según los diferentes contextos donde se realiza la actividad académica, por lo que es imposible hacer generalizaciones.

Una de las aristas fundamentales en la enseñanza-aprendizaje del cálculo es la resolución de problemas porque vincula el observar y entender los problemas para establecer relaciones, patrones, similitudes y diferencias entre las diferentes aplicaciones que están sujetas a las mismas estrategias de resolución, el mismo tipo de pensamiento y razonamiento.

De Guzmán (2007) citado por (Castillo, 2016 p.20) señala que la resolución de problemas transmite procesos de pensamiento de manera que el estudiante pone de manifiesto su creatividad, reflexión de su propio aprendizaje, se divertirá y ganará mayor confianza en sí mismo. Para distinguir las diferencias entre los logros de aprendizaje de los estudiantes en la resolución de problemas es preciso señalar indicadores que diferencien los niveles de logro.

Ruiz (2015) señala que los niveles de logro se enriquecen a lo largo de un ciclo universitario ya que es un proceso de desarrollo de competencias que se van profundizando de lo más simple a lo complejo, éstos permiten a los docentes reconocer los aprendizajes que logran los estudiantes en los diferentes niveles y los desafíos que tiene por desarrollar en aprendizajes que no han sido alcanzados.

Es importante la medición del desempeño de los estudiantes universitarios, puesto que facilita la interpretación de los resultados jerarquizándolas en categorías que van de menos a más. Backhoff et al, 2006 a: 18 citado en (Educativo de México, Panorama p.472, 2011) refiere que para cada uno de las escalas se definieron los niveles de logro educativo en términos de habilidades y conocimientos que posee un estudiante en una asignatura. El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) de México estableció cuatro niveles generales de logro para las escalas y éstos son:

Tabla N° 1

Descripción genérica de las competencias académicas que logran los estudiantes en cada nivel de logro educativo.

Niveles de logro	Competencias académicas
Por debajo del básico	Indica carencias importantes en el dominio curricular de los conocimientos, habilidades y destrezas que expresan una limitación para poder seguir progresando satisfactoriamente en la materia.
Básico	Indica un dominio imprescindible (suficiente, mínimo, esencial, fundamental o elemental) de conocimientos, habilidades y destrezas necesarios para poder seguir progresando satisfactoriamente en la materia.
Medio	Indica un dominio sustancial (adecuado, apropiado, correcto o considerable) de conocimientos, habilidades y destrezas que

	pone de manifiesto un buen aprovechamiento de lo previsto en el currículum.
Avanzado	Indica un dominio muy avanzado (intenso, inmejorable, óptimo o superior) de conocimientos, habilidades y destrezas que refleja el aprovechamiento máximo de lo previsto en el currículum

Fuente: Backhoff et al, 2006 a: 35

Teniendo en cuenta la escala de calificación del Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular (DCN-EBR) (2009) y la escala proporcionada por el INEE de México, podemos establecer contextualizando a la realidad universitaria del Perú una escala de calificación para los indicadores de logro de los aprendizajes esperados:

Indicadores de Logro

De acuerdo a Ruiz (2016, p.49) los indicadores de logro son una relación de aprendizajes exigidos en cada nivel y que describen los conocimientos y habilidades alcanzados, ya que la presencia de uno o dos de ellos en forma aislada no basta para afirmar que un estudiante alcanza un determinado Nivel de Logro. Los indicadores adaptados son:

Nivel Deficiente

Se trata de un estudiante que está empezando a desarrollar los aprendizajes previstos pero que evidencia dificultades para su adquisición, requiere acompañamiento e intervención del docente y de ayuda psicológica para superar la influencia de factores externos. No alcanza las condiciones mínimas del nivel bajo, las notas tienen una valoración de 0 a 8.

Nivel Bajo

Se trata de un estudiante que muestra un progreso hacia la solución correcta, sin embargo, no completa la resolución del problema. Tiene dificultades para interpretar los textos y requiere la asesoría del docente. No alcanza las condiciones mínimas del nivel regular. Sus notas tienen una valoración de 9 a 12. Entre otros indicadores los estudiantes:

- ✓ No interpretan adecuadamente el contexto de los problemas.
- ✓ Factorizan expresiones algebraicas sencillas, pero muestran dificultad en los casos notables.
- ✓ Tienen dificultades para cancelar expresiones algebraicas para levantar la indeterminación de una función.
- ✓ Resuelven situaciones problemáticas rutinarios de límites.
- ✓ Calculan derivadas directas, pero tienen dificultades para la derivada del cociente.
- ✓ No pueden aplicar la regla de la cadena para funciones compuestas.

Nivel Regular

Se trata de un estudiante que tiene conocimientos básicos de límites, desarrollan las derivadas directas, básicas y la regla de la cadena y llegan a determinar los valores críticos de una función real de variable real. Los estudiantes suelen tener ideas para la optimización de funciones. Sus notas tienen una valoración de 13 a 16. Entre otros indicadores los estudiantes:

- ✓ Interpretan adecuadamente el contexto de los problemas.
- ✓ Factorizan adecuadamente las expresiones algebraicas, pero tienen dificultad en las aplicaciones.
- ✓ Calcular adecuadamente los límites de una función, pero tienen dificultades con límites infinitos.
- ✓ Resuelven situaciones problemáticas rutinarios de derivación.
- ✓ Calculan derivadas usando la regla de la cadena directa, pero tienen dificultades para la derivada más complicadas.

- ✓ No pueden optimizar algunas funciones ni determinar las razones de cambio.

Nivel Alto

Se trata de un estudiante que resuelven todos los problemas rutinarios de las diferentes unidades. Calculan límites de cualquier tipo y los distintos casos de derivadas. Resuelven situaciones de razón de cambio y de optimización. Sus notas tienen una valoración de 17 a 20. Entre otros indicadores los estudiantes:

- ✓ Interpretan adecuadamente el contexto de los problemas.
- ✓ Factorizan adecuadamente todo tipo de expresiones algebraicas.
- ✓ Calcular adecuadamente los diferentes casos sobre límites de una función.
- ✓ Resuelven todas las situaciones problemáticas rutinarios de derivación, razón de cambio y optimización.
- ✓ Aplican adecuadamente las reglas de las derivadas, usan la regla de la cadena, derivada de logaritmos, de funciones inversas.
- ✓ Optimizan algunas situaciones problemáticas y determinan las razones de cambio de una función.

Logros de aprendizaje del cálculo I

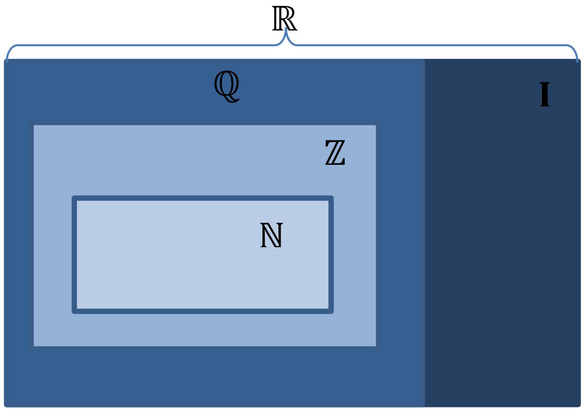
La enseñanza de la matemática viene transformándose constantemente con incorporaciones de nuevas estrategias que involucran el uso de herramientas tecnológicas que faciliten la comprensión y dominio de los conceptos matemáticos, en particular del cálculo que es objeto de nuestro estudio.

Programa del cálculo I:

Números Reales

El conjunto de los números Reales (R), es conocido como un cuerpo que admite la existencia de dos operaciones internas la adición (**+**) y multiplicación (**.**)

Figura 3: Conjunto de los Números Reales



Fuente: Elaboración Propia

Los números reales, verifican las siguientes propiedades (llamadas también *axiomas de cuerpo*).

Cerradura, Asociativa, Conmutativa, elemento neutro, inverso y distributiva.

Valor Absoluto

Se llama valor absoluto de un número real x, y se denota por $|x|$ al número real no negativo que cumple:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos: |15| = 15

|-4| = -(-4) = 4

|-12| = -(-12) = 12

Fuente: Elaboración propia.

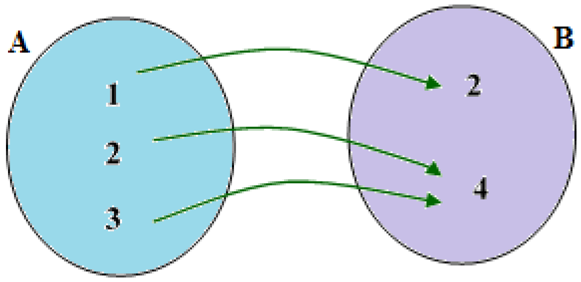
Funciones

Dados dos conjuntos A y B. La relación R $\subset$ A x B es función, si cada elemento del conjunto A se relaciona con uno y solo un elemento del conjunto B.

Simbólicamente, si f es función:

$$(a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \Rightarrow b = c$$

Figura 4: Esquema de una función



Fuente: Elaboración Propia

Dominio y Rango de una función

Al conjunto de partida se le llama dominio de *f* y se denota por Dom(*f*) y al conjunto de llegada se le llama rango de *f* y se denota por Ran(*f*).

De la función de la figura 4:

$$Dom(f)=\{1;2;3\} \quad y \quad Ran(f)=\{2;4\}$$

Límite de Funciones Reales de Valor Real

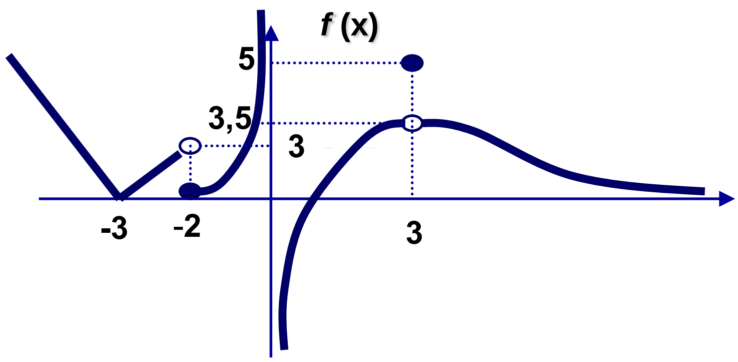
Definición informal: Si ***f*** **(*x*)** se acerca más y más al número ***L*** cuando ***x*** se aproxima cada vez más a ***a*** *(posiblemente excepto en a)*, por ambos lados, entonces ***L*** es el límite ***f*** **(*x*)** cuando ***x*** tiende a ***a***. Este comportamiento se expresa:

$$\underset{x\to a}{\text{Lím}}\ f(x)=L$$

Este límite existe si: <

Ejemplo (1):

Figura 5: Límites de f(x)



Fuente: Elaboración propia

$\underset{x\to -3}{\text{Lím}}\ f(x)=0$ $\qquad$ $\underset{x\to 0}{\text{Lím}}\ f(x)$ no existe $\qquad$ $\underset{x\to 3}{\text{Lím}}\ f(x)=3{,}5$

Ejemplo (2):

Calcule el valor del siguiente Límite: $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$

Solución:

Evaluando el límite: $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1} = \dfrac{(-1)^3+1}{-1+1} = \dfrac{0}{0}$ (indeterminado)

Factorizando x^3+1, se tiene:

$$\frac{x^3+1}{x+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)} = x^2-x+1$$

Entonces:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x^2-x+1) = (-1)^2-(-1)+1 = 3$$

Fuente: Elaboración propia

Continuidad

Continuidad en un punto: Larson, R. & Edwards, B. (2010) sostiene que una función es continua en a si satisfacen las tres condiciones siguientes:

1. *f(a) está definida.*
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Ejemplo (1):

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} x^2-9; si\ x<3 \text{ (función cuadrática)} \\ x-3\ ; si\ x>3 \text{ (función lineal)} \end{cases}$$

Solución:

Se observa que f(x) es continua a la izquierda y derecha de 3 ya que son funciones polinomiales.

Analizando si f(x) es continua en el punto 3, se tiene:

i) f (3) no existe porque no es un punto del dominio de la función

ii) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 3^2-9=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 3-3=0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0$

iii) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$, pues no existe f(3)

Por lo tanto, f(x) no es continua en x=3.

Fuente: Elaboración propia

Ejemplo (2):

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2; si\ x \leq 2 \text{ (función cuadrática)} \\ x \quad ; si\ x > 2 \text{ (función lineal)} \end{cases}$$

Solución:

Se observa que f(x) es continua a la izquierda y derecha de 2 ya que son funciones polinomiales.

Analizando si f(x) es continua en el punto 2, se tiene:

i) $f(2) = 2^2 - 2 = 2$ existe

ii) $\left.\begin{array}{l} \text{Lím}_{x \to 2^-} f(x) = 2^2 - 2 = 2 \\ \text{Lím}_{x \to 2^+} f(x) = \quad 2 \end{array}\right\} \text{Lím}_{x \to 2} f(x) = 2$

iii) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

Por lo tanto, como f(x) es continua en x=3, es continua en todo R

Fuente: Elaboración propia

La Derivada

Stewart, J. (2008) señala que la derivada de una función f en un número x, que se denota mediante $f'(x)$ es igual a:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \underset{h \to 0}{\text{Lím}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si el límite existe.

Ejemplo:

Si $f(x) = x^3$. Encuentre su derivada.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 3x^2+3xh+h^2 = 3x^2$$

Fuente: Elaboración propia

Reglas de derivación

1) Sea *f(x)* = *k*, k constante entonces $f'(x) = 0$
2) Potencia de x, $f(x) = x^n; n \in Z^+$ entonces $f'(x) = nx^{n-1}$
3) Múltiplo constante, $\frac{d}{dx}[kf(x)] = k\,f'(x)$
4) Adición y sustracción, $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$
5) Del producto, $\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
6) Del cociente, $\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{f'(x)g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$
7) Regla de la cadena: Si g es derivable en x, y f en g(x), por tanto, la función compuesta F=fog se define mediante F(x)=f(g(x)), derivable en x y F´ está dada por el producto:

$$F'(x)=f'[g(x)].g'(x)$$

Ejemplo (1): Calcule la derivada de f(x), si $f(x) = (x^3+4)\sqrt{x^2-2}$

$$f'(x) = (x^3+4)'\sqrt{x^2-2} + (x^3+4)[(\sqrt{x^2-2})]' \text{ (regla del producto)}$$
$$= (3x^2)\sqrt{x^2-2} + (x^3+4)\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$$

Fuente: Elaboración propia

Ejemplo (2): Calcule la derivada de f(x), si $f(x)=\left(\dfrac{3x^2+4}{x^3-2}\right)^2$

$$f'(x)=2\left(\frac{3x^2+4}{x^3-2}\right)' \quad \text{(regla de la cadena)}$$

$$=2\left(\frac{(3x^2+4)'(x^3-2)-(3x^2+4)(x^3-2)'}{(x^3-2)^2}\right) \; (\textit{regla del cociente})$$

$$=2\left(\frac{(6x)(x^3-2)-(3x^2+4)(3x^2)}{(x^3-2)^2}\right), \textit{ potencia de x}$$

$$=2\left(\frac{6x^4-12x-9x^4-12x^2}{(x^3-2)^2}\right)$$

$$=2\left(\frac{-3x^4-12x-12x^2}{(x^3-2)^2}\right)=-6\left(\frac{x^4+4x^2+4x}{(x^3-2)^2}\right)$$

Fuente: Elaboración propia

Derivada de las funciones: exponencial y logarítmica

De la exponencial, $y=e^{f(x)}$ *entonces* $\dfrac{dy}{dx}=e^{f(x)}.f'(x)$

Ejemplo (1):

Calcule la derivada de $f(x)=e^{3x^2+4x-5}$

Solución:

$f(x)=e^{3x^2+4x-5}$ entonces
$$f'(x)=e^{3x^2+4x-5}.(3x^2+4x-5)'$$
$$=e^{3x^2+4x-5}.(6x^2+4)=2(3x^2+2)e^{3x^2+4x-5}$$

Fuente: Elaboración propia

Ejemplo (2):

Calcule la derivada de $f(x)=Ln(3x^2-x+2)$

Solución:

Del logaritmo neperiano, $y=Ln(f(x))$ entonces $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$f(x)=Ln(3x^2-x+2)$ entonces $f'(x)=\dfrac{(3x^2-x+2)'}{(3x^2-x+2)}=\dfrac{6x-1}{(3x^2-x+2)}$

Fuente: Elaboración propia

Ejemplo (3):

Calcule la derivada de $f(x)=Ln\left(\dfrac{x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}\right)$

Solución:

Aplicando propiedad de logaritmos:

$$f(x)=Ln\left(\frac{x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}\right)=Ln(x^2-x+2)-Ln(2x^3-3x^2+1)$$

Entonces

$$f'(x)=\frac{(x^2-x+2)'}{(x^2-x+2)}-\frac{(2x^3-3x^2+1)'}{(2x^3-3x^2+1)}$$

$$=\frac{2x-1}{(x^2-x+2)}-\frac{6x^2-6x}{(2x^3-3x^2+1)}$$

Fuente: Elaboración propia

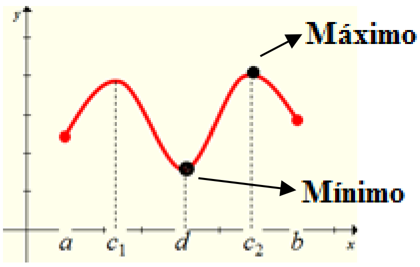
Extremos de Funciones

Larson, R. & Edwards, B. (2010) sostienen que si f está definida sobre un intervalo I que contiene a "a" entonces:

1. *f(a) es el mínimo de f en I si f(a)≤f(x) para todo x en I*
2. *f(a) es el mínimo de f en I si f(a)≤f(x) para todo x en I*

Estos mínimos y máximos de una función son los ***valores extremos*** de la función en el intervalo I.

Figura 6: Valores extremos



Fuente: Elaboración Propia

Una función *f* posee un ***máximo local en c*** si *f(c)* ≥ *f(x)* cuando *x* está cercano a *c*. De manera análoga, f tiene un ***mínimo local en c*** si *f(c)≤f(x)* cuando *x* está cerca de *c*.

Prueba de la primera derivada

Si c es un número crítico de una función f continua

1. Si $f'(x)$ cambia *de positiva a negativa* en *c*, entonces *f* tiene un *máximo local en c.*
2. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en *c*, entonces *f* tiene un *mínimo local en c*.
3. Si $f'(x)$ *no cambia de signo* en *c*, entonces *f no tiene extremo local en c*.

Ejemplo:

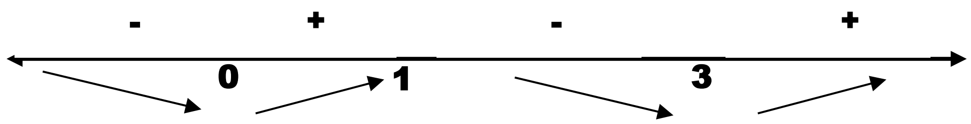
Determine los extremos locales de la gráfica de $f(x)=3x^4-16x^3+18x^2$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 4$.

Solución:

Calculando la derivada de f(x) se tiene: $f'(x)=12x^3-48x^2+36x$

Factorizamos e igualamos a cero, para calcular los números críticos

$f'(x)=12x(x^2-4x+3)=12x(x-1)(x-3)=0$. Los números críticos son 0; 1 y 3.



Si x=-1/2 entonces $f'(x)$=12(-) (-) (-) < 0 (negativo)

x=1/2 entonces $f'(x)$=12(+) (-) (-) > 0 (positivo)

x= 2 entonces $f'(x)$=12(+) (+) (-) > 0 (negativo)

x=3 1/2 entonces $f'(x)$=12(+) (+) (+) > 0 (positivo)

Conclusiones:

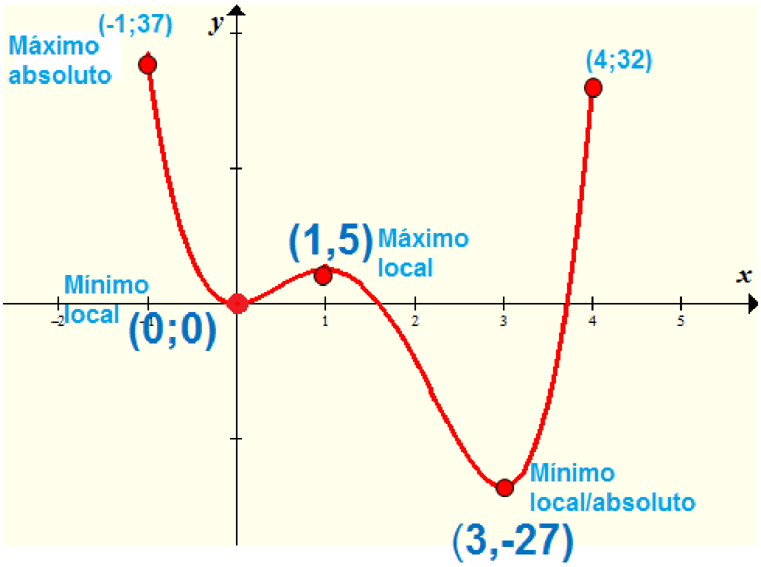
i) Como $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en 0, entonces 0 es mínimo local. Evaluando f (0) =0
ii) Como $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en 1, entonces 1 es máximo local. Evaluando f (1) =5
iii) Como $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en 3, entonces 3 es mínimo local. Evaluando f (3) =-27

Además, evaluando en los extremos del intervalo, se tiene:

f (-1) =37 y f (4) =32

Fuente: Elaboración propia

Figura 7: gráfica de la función

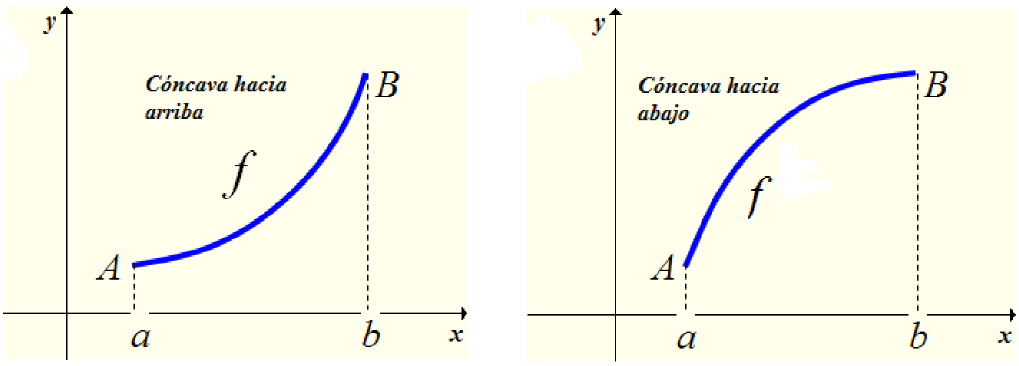


Fuente: Elaboración propia

Concavidad

Larson, R. & Edwards, B. (2010) sostiene "sea f derivable en un intervalo abierto I. La gráfica de f es *cóncava hacia arriba* sobre I si f ' es creciente en el intervalo y *cóncava hacia abajo* en I si f ' es decreciente en el intervalo". En efecto cuando una curva se tuerce hacia arriba decimos que es *cóncava hacia arriba* y cuando la curva se tuerce hacia abajo decimos que es cóncava hacia *abajo.*

Figura 8: Concavidades



Fuente: elaboración propia

Prueba de concavidad

a) Si f′′(x) > 0 para toda x en I, entonces la gráfica de f es *cóncava hacia arriba en I*.

b) Si $f''(x) < 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es *cóncava hacia abajo en I*.

Definición de punto de inflexión

"Un punto P de una curva se llama punto de inflexión, si es continua en él y la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo y viceversa" Stewart, J. (2008).

Ejemplo:

Esboce la curva correspondiente a $f(x)=x^4-4x^3$, analizando su concavidad, puntos de inflexión, máximos y mínimos locales.

Solución:

Derivando a la función $f(x)=x^4-4x^3$ se tiene:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$$

Para determinar los números críticos *f′(x)=0*, entonces x**=0, y x=3**

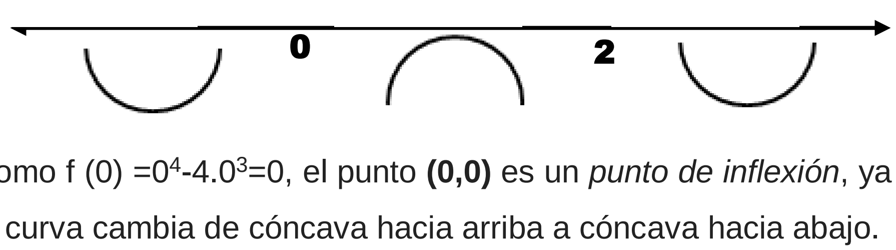
Aplicando la prueba de la segunda derivada evaluamos en:

x=0 entonces $f''(0) = 12(0)(0-2) = 0$

x=3 entonces $f''(3) = 12(3)(3-1) = 36 > 0$

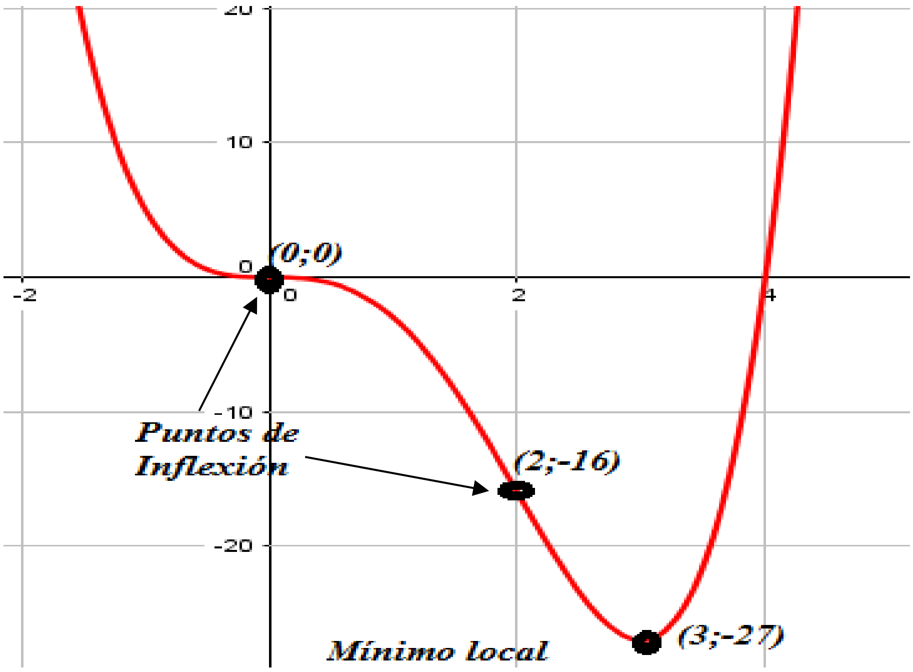
Luego, como $f'(3) = 0$ y $f''(3) > 0$ entonces $f(3) = -27$ es un ***mínimo local***.

Ahora bien, cuando $f''(x)=0$ entonces **x=0 o 2**, dividimos la recta en intervalos como sigue:



- ✓ Como $f(0) = 0^4-4.0^3=0$, el punto **(0,0)** es un *punto de inflexión*, ya que la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo.
- ✓ Como $f(2) = 2^4-4.2^3=-16$, el punto **(2, -16)** es otro *punto de inflexión* porque la curva cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Figura 9: Gráfica de la función $f(x)=x^4-4x^3$



Fuente: Elaboración propia

Razón de Cambio relacionadas

Se habla de razón de cambio cuando por ejemplo nos referimos al como fluye agua al interior de un depósito o en todo caso la tasa a la cual el área de un derrame de petróleo está creciendo, etc.

Si una variable ***y*** depende del tiempo ***t***, entonces de su derivada *dy/dt* se llama razón de cambio con respecto al tiempo, o sólo razón de cambio. Un ejemplo clásico resulta cuando ***y*** mide la distancia entonces la razón de cambio sería la velocidad.

Ejemplo:

Un globo esférico se expande con el tiempo. ¿cómo se relaciona la razón a la que aumenta el radio?

Solución:

En cualquier instante ***t*** el volumen ***V*** de una esfera está dado por: $V=\frac{4\pi r^3}{3}$. Entonces podemos encontrar las relaciones respecto del tiempo.

Derivando implícitamente V respecto del tiempo, se tiene:

$$\frac{d}{dt}[V] = \frac{d}{dt}[\frac{4}{3}\pi r^3] \text{ entonces } \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \frac{d}{dt}[r^3]$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi(3r^2 \frac{dr}{dt})$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right) / \left(\frac{dr}{dt}\right) = 4\pi r^2$$

Estrategias para la enseñanza del Cálculo

En el nivel universitario existen una diversidad de métodos de enseñanza y en particular en la enseñanza de la matemática. Las universidades adoptan estrategias a través del área de calidad educativa quienes señalan el camino a seguir, entre otras propuestas tenemos:

- ✓ Modelación matemática
- ✓ Modelo heurístico
- ✓ Enseñanza problémica
- ✓ Aprendizaje basado en problemas
- ✓ Aprendizaje basado en proyectos
- ✓ Métodos de investigación

En nuestra investigación hemos adoptado ***el modelo heurístico***, dado que permite el descubrimiento de nuevos conocimientos sobre la base de conocimientos ya adquiridos, permite hacer generalizaciones y resolver problemas.

Según Horst Müler (citado por Reynaga & Ruiz, 2014), señala que los "procedimientos heurísticos son formas de trabajo y de pensamiento que apoyan la realización consciente de actividades mentales exigentes".

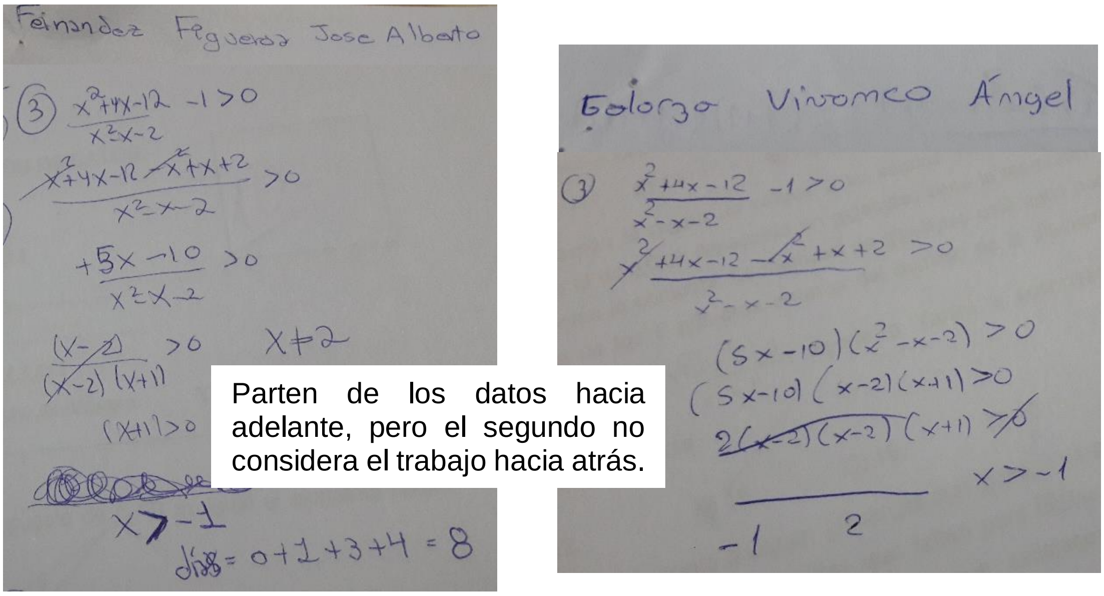
Reynaga & Ruiz (2014) señalan que el modelo heurístico propone reglas que ayudan a resolver problemas como: separar lo dado de lo buscado, verificar fórmulas adecuadas, usar números en lugar de datos, reformular el problema, etc.

La heurística organiza el proceso de la resolución de problemas en estrategias como:

El trabajo va hacia adelante: Partiendo de lo dado se conduce a la solución del problema.

El trabajo hacia atrás: Analizar lo que se busca, lo que se necesita hasta llegar a los datos que se dan.

Figura N°10: Estrategias heurísticas



Fuente: Elaboración propia.

PROGRAMA DE APLICACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES ALGEBRAÍCAS EN EL CÁLCULO I

Primera Sesión:

Tema trabajado: Productos Notables

Estrategia : Modelación, plan heurístico de Polya

Indicadores :

- ✓ Se plantea a los estudiantes que completen las siguientes igualdades

$(x+y)^2 =$

$(x+y)^3 =$

- ✓ Se forman grupos de trabajo de cuatro estudiantes
- ✓ Se les pide que interpreten adecuadamente para dar la respuesta correcta
- ✓ El docente acompaña a los estudiantes de manera que los estudiantes descubran por sí mismo el procedimiento y la solución correspondiente.
- ✓ Se pide a los estudiantes que compartan su respuesta correcta en la pizarra.

Segunda Sesión:

Tema trabajado: Aplicación de productos notables en Cálculo I

Estrategia : Modelación, plan heurístico de Polya

Indicadores :

Se presenta un problema de modelación, donde se aplica productos notables para su resolución. Se les sugiere a los estudiantes:

- ✓ Entender el problema.
- ✓ Distinguir los datos
- ✓ Si es un problema similar a uno ya resuelto, replicarlo
- ✓ Trazar o configurar un plan en busca de la solución, para ello se puede hacer un diagrama, usar un razonamiento indirecto.
- ✓ Implementar estrategias para ejecutar el plan.
- ✓ Una vez encontrada la solución, mirar hacia atrás, para analizar si la respuesta satisface lo pedido.

Tercera Sesión:

Tema trabajado: Racionalización

Estrategia : Modelación, plan heurístico de Polya

Indicadores :

- ✓ Se plantea a los estudiantes que racionalicen las expresiones como las siguientes

$$\frac{x^2 - 25}{\sqrt{x} - 5} =$$

$$\frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} =$$

- ✓ El docente acompaña a los estudiantes de manera que los estudiantes descubran por sí mismo el procedimiento y la solución correspondiente.
- ✓ A los estudiantes que dieron la respuesta correcta se les pide que escriban la solución en la pizarra.

Cuarta Sesión:

Tema trabajado: Aplicación de la Racionalización en el Cálculo I
Estrategia : Modelación, plan heurístico de Polya
Indicadores :

Se presenta un problema de modelación, donde se aplica la racionalización para resolver el problema. Se les pide a los estudiantes:

- ✓ Si se entiende lo que dice.
- ✓ Si pueden deducir a donde llegar.
- ✓ Si es un problema similar a uno ya resuelto
- ✓ Trazar o configurar un plan en busca de la solución, para ello se puede hacer un diagrama, usar un razonamiento indirecto.
- ✓ Implementar estrategias para ejecutar el plan.
- ✓ Volver a empezar si se encuentra alguna dificultad.
- ✓ Una vez encontrada la solución, mirar hacia atrás, para analizar si la respuesta satisface lo pedido.
- ✓ Analizar si se puede llegar por un camino más corto a la solución.

Quinta Sesión:

Tema trabajado: Factorización
Estrategia : Modelación, plan heurístico de Polya

Indicadores :

- ✓ Se plantea a los estudiantes que factoricen expresiones como las siguientes

$$\frac{2x^2-17x+30}{x^2-36}=$$

$$\frac{2x^2-7x-4}{x^2+3x-28}=$$

- ✓
- ✓ El docente acompaña a los estudiantes de manera que los estudiantes descubran por sí mismo el procedimiento y la solución correspondiente.
- ✓ A los estudiantes que dieron la respuesta correcta se les pide que escriban la solución en la pizarra.

Sexta Sesión:

Tema trabajado: Aplicación de la Factorización en el Cálculo I

Estrategia : Modelación, plan heurístico de Polya

Indicadores :

Se presenta un problema de modelación, donde se aplique la factorización a realizar. Se interactúa y se pide a los estudiantes:

- ✓ Entender el contexto del problema.
- ✓ Si pueden deducir a donde llegar.
- ✓ Si es un problema similar a uno ya resuelto
- ✓ Trazar o configurar un plan en busca de la solución, para ello se puede hacer un diagrama, usar un razonamiento indirecto.
- ✓ Implementar estrategias para ejecutar el plan.
- ✓ Volver a empezar si se encuentra alguna dificultad.
- ✓ Una vez encontrada la solución, mirar hacia atrás, para analizar si la respuesta satisface lo pedido.
- ✓ Analizar si se puede llegar por un camino más corto a la solución.

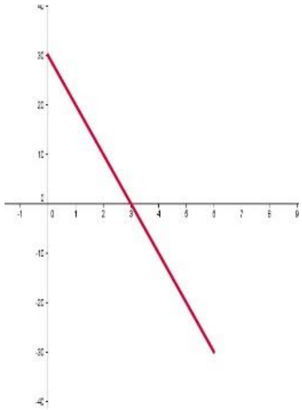
Séptima Sesión:

Tema trabajado: Extremos de una función

Estrategia : Modelación, plan heurístico de Polya

Indicadores :

Se presenta la siguiente reflexión, sobre la gráfica del ingreso marginal y se pregunta ¿Cuántas unidades debe vender la empresa para maximizar el ingreso?



- ✓ Se plantea a los estudiantes que preguntas del tipo siguiente: Hallar los valores extremos relativos de la función: $f(x) = x^4 - 8x^2$.
- ✓ Se forman grupos de trabajo de cuatro estudiantes, se les pide que entiendan adecuadamente para poder dar la respuesta adecuada, el docente acompaña a los estudiantes de manera que descubran por sí mismo la solución y analiza las posibles respuestas.
- ✓ A los estudiantes que dieron la respuesta correcta se les pide que escriban la solución en la pizarra.

Octava Sesión:

Tema trabajado: Aplicación de los extremos de una función / Optimización

Estrategia : Modelación, plan heurístico de Polya

Indicadores :

Se presenta un problema de modelación, donde haya una transformación algebraica para encontrar máximos y mínimos de una función.

Se presenta el siguiente caso

"La empresa minera COBRE-PERÚ se dedica a la producción y venta de concentrado de mineral, y proyecta que la función de demanda está dada por $p(x) = -0{,}5x^2 + 7\,200$ donde x es el número de toneladas producidas y vendidas y p es el precio en dólares, se pide determinar:

- La función ingreso.
- El número de toneladas producidas y vendidas que dan el ingreso máximo, así como dicho ingreso.
- Graficar la función ingreso indicando intervalos donde es creciente y decreciente con una escala adecuada."

Ahora se les pide a los estudiantes:

- ✓ Si se entiende lo que dice.
- ✓ Si pueden deducir a donde llegar.
- ✓ Si es un problema similar a uno ya resuelto
- ✓ Trazar o configurar un plan en busca de la solución, para ello se puede hacer un diagrama, usar un razonamiento indirecto.
- ✓ Implementar estrategias para ejecutar el plan.
- ✓ Volver a empezar si se encuentra alguna dificultad.
- ✓ Una vez encontrada la solución, mirar hacia atrás, para analizar si la respuesta satisface lo pedido.
- ✓ Analizar si se puede llegar por un camino más corto a la solución.

Además se planteó como problema reto, determinar lo mismo en la función de demanda $p(x) = 3e^{8-0{,}02x}$

Recomendaciones para el uso de la estrategia

En las sesiones de aprendizaje de la asignatura de Calculo I, se debe considerar que encontraremos diversidad de maneras de actuar, pensar y solucionar problemas de nuestros estudiantes, por lo que es importante crear un ambiente empático para que trabajando en colaboración se logren aprendizajes ricos, creativos y significativos.

Gaulin (citado por Del Valle & Curotto, 2008) habla de problemas que demandan reflexión, búsqueda, investigación y donde para responder hay que pensar en las soluciones y estrategias de resolución de los problemas. Para Polya (citado por Del Valle & Curotto, 2008) señala que un problema significa buscar de forma consiente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable en forma inmediata.

Luego de motivarlos y señalar la utilidad del contenido (ya sea a través de una imagen y/o un video) seguir los siguientes pasos:

- ✓ Revisión de tópicos de transformaciones algebraicas antes de sustentar los temas del cálculo I.
- ✓ Modelación de resolución de problemas de los tópicos de transformaciones algebraicas usando la heurística.
- ✓ Trabajo colaborativo de los estudiantes para resolver situaciones problemáticas de los tópicos de transformaciones algebraicas.
- ✓ Sustentación de la resolución de los problemas de tópicos de transformaciones algebraicas por los diferentes equipos en plenario.
- ✓ Profundización de la resolución de problemas de los tópicos de las transformaciones algebraicas por parte del docente guía.
- ✓ Planteamiento de problemas retos de los tópicos de las transformaciones algebraicas, para su resolución en plenario con la participación de todos los estudiantes.
- ✓ Tareas domiciliarias para profundizar la asimilación de las estrategias de resolución de problemas.

1.3 Investigaciones

Investigaciones Nacionales

Reynaga Alarcón Oscar, Ruiz Arango Isidoro (2014) en su trabajo de investigación titulado *Influencia de las aplicaciones de los métodos de Polya y Aprendizaje Basado en Problemas en el rendimiento matemático de los estudiantes del I.E.P. Jean Piaget del distrito de Carabayllo*, tuvo como objetivo determinar la influencia de los métodos mencionados en el rendimiento matemático de los estudiantes de tercero y cuarto grado de educación secundaria. El diseño utilizado fue el pre-experimental con un solo grupo.

La muestra estuvo constituida por 50 estudiantes de tercero y cuarto grado a quienes se les dividió en dos grupos homogéneos de 25 alumnos, uno para el método de Polya y el otro para el ABP, luego se les aplicó una pre prueba de 12 preguntas objetivas de 5 alternativas donde la respuesta correcta tenía un peso de 5 y la más alejada de 1, para evaluar su rendimiento inicial, seguido de sesiones de enseñanza aprendizaje de los dos métodos en sus respectivos grupos, finalmente se evaluó en una pos prueba para medir la influencia de los respectivos métodos aplicados.

Posteriormente haciendo uso del programa estadístico SPSS se llegó a la conclusión que efectivamente los métodos de Polya y ABP influyen positivamente en el rendimiento matemático de los estudiantes sujetos de investigación.

Medina Martínez Antonio Marcos, Aucallanchi Velásquez, Félix Benjamín (2012), su trabajo de investigación titulado *Aplicación de Dos Técnicas Didácticas y sus Efectos en el Rendimiento Académico en Matemática en Instituciones Educativos Privadas de Piura, Chiclayo, Cajamarca y Trujillo –Habilidades generales Matemáticas –Modelación Matemática*, tuvo como objetivo determinar los efectos de la aplicación de dos técnicas didácticas sobre el rendimiento académico en Matemático. Se seleccionaron dos secciones de cuarto grado y dos de quinto grado de secundaria de las instituciones Educativas Privadas

Proyecto (Piura), Adeu (Chiclayo), San Fernando (Cajamarca) y Kepler (Trujillo). Las dos secciones de cada grado fueron formadas considerando su homogeneidad, desde el punto de vista de su rendimiento académico, para que uno fuera el grupo experimental y el otro el de control.

El método de la investigación fue experimental porque se hizo la “manipulación intencional” de las técnicas didácticas centradas en las habilidades generales matemáticas y en la modelación matemática lo cual permitió determinar sus efectos en el rendimiento académico en Matemática.

El tipo de investigación fue explicativo porque el interés era explicar por qué la aplicación de las técnicas podía generar un mayor rendimiento académico en Matemática. El nivel de investigación fue aplicado, en razón que se utilizó conocimientos de la Matemática y de la didáctica de la Matemática. El diseño contó con preprueba, posprueba y grupo control. La población estuvo conformada por 1461 alumnos, tomando una muestra de 533 estudiantes.

La preprueba y posprueba fueron elaboradas con preguntas liberadas de los exámenes PISA, dando mayor confiabilidad al instrumento. La prueba estadística utilizada fue la T pareada cuando se trató de comparar la preprueba y la posprueba del mismo grupo y la T para dos muestras cuando se trató de comparar las pospruebas del grupo experimental y del grupo control. Para las pruebas estadísticas utilizaron, la media, la desviación estándar, la nota mínima y la nota máxima. Para este propósito usaron el programa Minitab 15.

Los investigadores llegaron a las siguientes conclusiones: de las 32 pruebas de hipótesis realizadas que involucran directamente a la aplicación de las técnicas didácticas, en 25 de ellas se obtuvieron resultados a favor, demostrando que sí hay un incremento en el rendimiento académico producto de la aplicación de las técnicas, y un mayor incremento si se le compara con las técnicas tradicionales. En varios casos el incremento del promedio fue en más de un punto.

Domínguez Armijos Hernán, Robledo Gutiérrez Danitza (2009) en su trabajo de investigación titulado *Influencia del plan de acción "Jugando con la matemática" basado en la metodología activa en el logro de las capacidades del área de matemática en los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la I.E. P.N.P "Bacilio Ramírez Peña", Piura – 2008;* tuvo como objetivo fundamental averiguar la influencia del plan de acción "Jugando con la matemática" en el logro de capacidades del área de matemática de los estudiantes del cuarto de secundaria.

Esta investigación ha utilizado el diseño de investigación pre experimental con "Pre Test y Post Test" en un grupo experimental, cuyos resultados se evidencian en las tablas y figuras, tal como lo recomienda las normas estadísticas. En la muestra de 64 estudiantes se logró incrementar el nivel de las capacidades matemáticas como razonamiento y demostración; comunicación matemática y resolución de problemas.

La investigación a través de t de Student encontró evidencias suficientes que demostraron que el promedio del post test es mayor que el pre test lo que corroboró que el plan de acción "jugando con la matemática influye positivamente en el logro de las capacidades matemáticas, así como también las actitudes frente al área.

Investigaciones Internacionales

Irazoqui Becerra Elías (2015) en su tesis doctoral presentada en la Universidad Nacional de Educación a Distancia cuyo título es *el aprendizaje del cálculo diferencial: una propuesta basada en la modularización* aplicada en el campus de Chillán de la Universidad del Bío-Bío, cuyo objetivo fue mejorar los rendimientos académicos de los estudiantes sometidos al diseño curricular modular en contrate con aquellos estudiantes que no se vieron bajo esta modalidad de trabajo.

El diseño de investigación cuasi experimental de enfoque cuantitativo basada en el diseño curricular modular (dcm) se aplicó a dos grupos uno experimental sometido al dcm y el otro grupo de control sometido a la enseñanza y aprendizaje tradicional del cálculo diferencial. Se cuidaron los sesgos en las mediciones para que ambos grupos de estudio no tuviesen sesgos, dado que los profesores participantes tenían características similares en cuanto a años de servicio en la Universidad como a formación académica si se quiere, aunque esta variable es un poco difícil de controlar en la práctica.

La hipótesis que pretendía demostrar un mejor aprendizaje del cálculo diferencial era posible cuando la forma de implementar el curso en el aula se ceñía a un diseño curricular modular, fue notorio al determinarse mayor rendimiento académico final de los estudiantes que cursaron su asignatura bajo el dcm confirmándose con los resultados estadísticos exhibidos de la hipótesis planteada.

Para demostrar la hipótesis se preparó instrumento de evaluación, denominado Pre-Test y Post-Test, debidamente validado para aplicar a ambos grupos, el grupo control y el grupo experimental en los cuales se dividió de forma aleatoria este nuevo curso, concluyéndose con el mejor desempeño académico de los estudiantes del grupo experimental.

Finalmente hay aún camino por recorrer para mejorar la propuesta, los buenos o malos resultados académicos de una propuesta se replican o se rechazan de plano. Tal vez sea posible aplicarla en otros cursos o quizás en el cálculo integral como tarea inmediata a asumir, la que podrá ser abordada bajo este diseño curricular modular expuesto en esta tesis.

Alcalde Esteban, Manuel (2010) en su tesis doctoral de Didáctica de la Matemática presentada en la Universitat Jaume I Valencia España, cuyo título es *Importancia de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes para el aprendizaje de la didáctica de la matemática en las titulaciones de maestro en la Universitat Jaume I*, y cuyo objetivo fue determinar el nivel de los estudiantes que aspiran al Diplomado de maestro en conocimientos previos de la matemática condujo a un estudio cuasi experimental con dos grupos experimental y de control.

Se pretendía demostrar que el nivel de conocimientos previos de los estudiantes de maestro que no asistieron al curso cero (matemática previa) es equivalente al de los asistentes al curso cero. Para el estudio se realizó un diseño cuasi experimental con pre test y pos test con grupo de control. La medida del pre test fue única para determinar el nivel de partida en conocimientos matemáticos de los estudiantes de primer curso de maestro tanto de los estudiantes del grupo experimental como de control. Posteriormente se aplicaron varias medidas de pos test para analizar los objetivos que hacen referencia a contenidos y didáctica de la matemática.

La muestra elegida formada por estudiantes del primer curso de diplomado estuvo conformado por 637 estudiantes en el grupo de control y 92 estudiantes en el grupo experimental.

Luego de las evaluaciones se demostró que no existen diferencias significativas entre los niveles de conocimientos matemáticos previos entre el grupo de control y experimental. Sin embargo, quedó demostrado que el nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de maestro asistentes al curso cero al final es mejor que el de los no asistentes.

Finalmente queda claro a raíz de la investigación que los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes tienen una gran importancia para el aprendizaje de la didáctica de la matemática en las titulaciones de maestro en la UJI.

Gómez Aguirre, Alejandro (2010) en su tesis doctoral de Didáctica de la Matemática en la Universidad Autónoma de Barcelona España, cuyo título es *El proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de ordenación y combinación con estudiantes de educación superior: Un* *enfoque basado en la resolución de problemas*, fue aplicada en estudiantes ingresantes en la especialidad de Licenciatura en Informática de la Universidad de Veracruz México, manifiesta que el diseño de investigación condujo a la división de la población bajo estudio, dando lugar a la conformación de dos grupos (Grupo Experimental y Grupo de Control). El grupo experimental fue guiado por el profesor usando el método resolución de problemas, mientras que el grupo de control realizó el mismo trabajo, pero basado en el método tradicional.

Como conclusión señala que el grupo experimental fueron alentados para utilizar diferentes estrategias heurísticas (modelos y representaciones) y explicar el uso de ellas. Para Bharath (2004) es importante que los estudiantes tengan libertad para utilizar diferentes representaciones y modelos y que estos sean alentados a describir y explicar sus acciones.

Los estudiantes del grupo de control fueron instruidos para resolver los problemas utilizando fórmulas acompañadas de una serie de reglas para aplicarlas en diferentes modelos combinatorios. En torno a este aspecto Polya (1965) opina que un profesor que usa su tiempo en ejercitar a sus estudiantes en operaciones que son rutinarias no estimula el interés y la curiosidad, e impedirá el desarrollo intelectual.

Por otro lado, algunos estudiantes de la clase tradicional se mantuvieron atentos a las explicaciones del profesor y participaron individualmente en la resolución de problemas. A petición del profesor, algunos de ellos (muy pocos), socializaron con el grupo la solución del problema y en raras ocasiones el proceso de resolución.

A pesar de que los resultados no son los esperados, se pueden destacar algunas conclusiones importantes sobre los logros del método de enseñanza:

- ✓ Mayor riqueza de estrategias.
- ✓ No siempre los ejemplos son una ayuda en la resolución de problemas.
- ✓ Buscan justificar el producto de los datos del enunciado del problema.

- ✓ Si los estudiantes conocen el modelo combinatorio al que pertenece el problema, logran la solución cuando usan las fórmulas propias de la combinatoria o el principio del palomar.

1.4 Marco Conceptual

Aprendizaje

El aprendizaje es un cambio perdurable en la conducta o en la capacidad de comportarse de cierta manera, el cual es resultado de la práctica o de otras formas de experiencia.

(Schunk D. Teorías de Aprendizaje, 2012, p.3)

Binomio

Un ***binomio*** es una expresión algebraica equivalente a la suma de dos monomios, por ejemplo, ax+b.

(Elaboración propia, Lima 2017)

Cálculo

Según el diccionario la palabra cálculo proviene del término latino calculus ("piedra") y se refiere a la cuenta, la enumeración o la pesquisa que se lleva a cabo mediante un ejercicio matemático. En el ámbito de la matemática superior cálculo se vincula a la idea de algoritmo, del análisis matemático, de la modelación de funciones, de las aplicaciones de la derivada, de la optimización y la razón de cambio.

(Recuperado de https://prezi.com/ncfjqltl33uy/la-palabra-calculo-proviene-del-termino-latino-calculus-pi/)

Concavidad

Si una función ***f*** es derivable en un intervalo, la gráfica de f es *cóncava hacia arriba* en el intervalo si f ' es creciente en el intervalo y *cóncava hacia abajo* en el intervalo si f ' es decreciente en el intervalo. En efecto cuando una curva se tuerce hacia arriba decimos que es *cóncava hacia arriba* y cuando la curva se tuerce hacia abajo decimos que es cóncava hacia *abajo.*

(Larson, R. & Edwards, B. 2010)

Conductismo

Es un paradigma de la Psicología, que destaca como determinante de la conducta humana, fundamentalmente el medio y las consecuencias inmediatas de placer o dolor del comportamiento.

(Chuco, W., 2002, p. 53)

Continuidad de un punto

Una función es continua en el punto "**a**" si satisfacen las tres condiciones siguientes: Primero, *f(a) está definida; segundo,* $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y tercero $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. La continuidad se entiende que a lo largo de la curva no hay huecos o vacíos, en términos simples cuando se puede trazar una curva sin levantar el lápiz.

(Larson, R. & Edwards, B. 2010)

Constructivismo

Es la educación desarrollada a través de procesos vivenciales, que tiene como eje el trabajo de construcción del conocimiento por el propio estudiante, con el acompañamiento y guía del docente, en un entorno de aprendizaje y comprometido con la idiosincrasia social.

(Chuco, W., 2002, p. 59)

Derivada

En el análisis matemático, la derivada tiene su origen al calcular la pendiente de una recta tangente en un determinado punto de la curva de la función. La derivada es la razón de cambio que mide la variación de *y* cuando hay una pequeña variación de *x*.

(Elaboración propia, Lima 2017)

Expresión algebraica

Una expresión algebraica es la combinación de letras y números como por ejemplo ax^n o ax^2+bx+c.

(Elaboración propia, Lima 2017)

Factorización

Factorizar una expresión algebraica es encontrar dos o más factores cuyo producto es igual a la expresión algebraica original. También se considera la factorización como la operación inversa a la multiplicación, puesto que lo que se pretende es hallar el producto de dos o más factores; mientras que, en la factorización, se buscan los factores de un producto dado.

(Algebra preuniversitaria, p.41)

Función

En las matemáticas, una función de X a Y es una relación entre X y Y con la propiedad de que, si dos pares ordenados tienen el mismo valor de x, entonces también tienen el mismo valor de y. La variable x se denomina variable independiente, mientras que la variable y se denomina variable dependiente.

(Larson, R. & Edwards, B. 2010, p.19)

Límite de un punto

De manera intuitiva se dice que si ***f* (*x*)** se acerca más y más al número ***L*** cuando ***x*** se aproxima cada vez más a ***a*** *(posiblemente excepto en a)*, por ambos lados, entonces ***L*** es el límite ***f* (*x*)** cuando ***x*** tiende a ***a***.

(Stewart J. 2008, p.88)

Logro de aprendizaje

El logro de aprendizaje es una relación estrecha entre lo que se aprende y la nota obtenida (resultado de la suma de las diferentes actividades académicas de un periodo) observando que sus efectos diferenciales van según los diferentes contextos donde se realiza la actividad académica, por lo que es imposible hacer generalizaciones.

(Pérez &Ramón & Sánchez, 2000)

Monomio

Un ***monomio*** es una expresión algebraica de la forma $a\,x^k$ donde a es un número real y k un entero no negativo.

(Elaboración propia, Lima 2017)

Número critico

En las matemáticas, una función de una variable real encuentra su punto crítico en todo valor que impida que la función sea diferenciable o que haga que su derivada sea cero.

(Recuperado de http://definicion.de/punto-critico/)

Números reales

“El conjunto de los números reales pertenece en matemáticas a la recta numérica que comprende a los números racionales y a los números irracionales. Esto quiere decir que incluyen a todos los números positivos y negativos, el símbolo cero, y a los números que no pueden ser expresados mediante fracciones de dos enteros que tengan como denominador a números no nulos (excluye al denominador cero)”

(Recuperado de http://www.numerosreales.com/)

Productos Notables

Son las multiplicaciones con expresiones algebraicas cuyo resultado se obtienen por simple inspección, sin realizar las multiplicaciones ni aplicar propiedades, ni reglas fijas. Su aplicación reduce el tiempo y optimiza la solución de muchas multiplicaciones habituales.

(Recuperado de http://suumate-productosnotables.blogspot.pe/)

Punto de inflexión

Un punto P de una curva se llama punto de inflexión, si es continua en él y la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo y viceversa.

(Stewart J. 2008, p.291)

Racionalización

Se define como el proceso de racionalización para una fracción $\frac{A}{B}$ donde el denominador es un término irracional (raíz irreductible) en otra fracción equivalente cuyo denominador es un término racional, es decir no contiene raíz.

(Carreño X. & Cruz X. ,2006, p.318)

Resolución de problemas

La resolución es el acto y el resultado de resolver. La resolución está vinculado al procedimiento y estrategias que se utilizan para resolver una situación problemática identificada la complejidad el inconveniente en cuestión.

Valor absoluto

El valor absoluto se utiliza en campo de las matemáticas para nombrar al valor que tiene un número más allá de su signo. Esto quiere decir que el valor absoluto, que también se conoce como módulo, es la magnitud numérica de la cifra sin importar si su signo es positivo o negativo.

(Recuperado de http://definicion.de/valor-absoluto/)

CAPÍTULO II: El Problema, Objetivos, Hipótesis y Variables

2.1 Planteamiento del Problema

2.1.1 Descripción de la Realidad Problemática

En los tiempos actuales impera en el Perú la crisis política, el fenómeno del niño costero y sus consecuencias fatales en el medio ambiente en particular el norte peruano, la sociedad dividida, la falta de liderazgo y en medio de esta realidad la agonizante educación pública universitaria.

En los últimos años las universidades públicas han ingresado a una etapa de cambios significativos puesto que la gran mayoría de ellos renuevan sus autoridades a raíz de la promulgación y publicación de la nueva Ley universitaria N°30220 (09/07/2014, El Peruano) que tiene por objeto normar la creación, funcionamiento, supervisión y cierre de las universidades, para lograr el objetivo se ha creado la Superintendencia Nacional de Educación Superior Universitaria (SUNEDU), encargada de salvaguardar el cumplimiento de las disposiciones descritas en la Ley.

En el último año las universidades públicas han experimentado mejoras notables, dado el ordenamiento de las actividades universitarias y la elección de las principales autoridades elegidas en lista única en votación universal por profesores y estudiantes. En ese sentido la mayoría de ellos han tomado medidas para mejorar la enseñanza pública y adecuarse a las recomendaciones de la SUNEDU y lograr el licenciamiento y acreditación correspondiente.

El Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés) en los últimos 15 años ha publicado los resultados de las evaluaciones en matemática y el Perú siempre ha estado ocupando los últimos lugares, sin embargo, es preciso reconocer que en la última evaluación PISA el Perú ha mejorado significativamente y ha escalado algunas posiciones, pero seguimos en los últimos lugares.

¿Las pruebas PISA es un indicador válido para asegurar que se enseña y aprende bien las matemáticas?

Universidad de Piura (UDEP, 2016) a través de Miguel Wilhelmi y Marcos Zapata señalan que las pruebas PISA no miden el nivel de aprendizaje y enseñanza menos la didáctica empleada, PISA mide competencias que se realizan en corto tiempo por ello mide parcialmente el conocimiento adquirido de alguna forma, nuestros alumnos no están habituados a este tipo de problemas ya que su aprendizaje es memorístico y resuelven problemas automáticos como se muestran en los diferentes textos.

Ante esta situación las universidades públicas se obligan a ofrecer programas de nivelación matemática a través de sus centros preuniversitarios para prepararlos y enfrentar exitosamente los exámenes de admisión, cabe mencionar que aprenden y resuelven los problemas “tipos” que se acostumbra en los diferentes exámenes de admisión.

¿Qué hace la universidad pública para superar esta problemática? En la práctica y los hechos nada, ya que cada docente pone el mayor esfuerzo y talento para superar las carencias logísticas que adolece en su labor académica. Muchas universidades públicas y en particular la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM) carece de apoyo tecnológico como el multimedia y poder hacer uso de las TIC´S por lo que se sigue enseñando de manera tradicional. A esto hay que añadir la falta de capacitación docente y las mejoras salariales, lo que desmotiva el buen desempeño. La Ley universitaria establece la homologación de sueldos con lo que perciben los magistrados y hasta la fecha no hay nada concreto muy a pesar de las movilizaciones realizadas por los docentes.

UDEP (2016) a través de los doctores Wilhelmi y Zapata sostienen que un buen profesor puede hacernos amar las matemáticas y hasta enseñarlas, en buena cuenta la actitud y vocación del docente para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas son esenciales. Además, señalan que es imprescindible el conocimiento de la *didáctica de la matemática* puesto que el docente conoce mejor sus limitaciones y fortalezas, aparte de una comprensión del objeto matemático, desde su naturaleza de creación, evolución y encontrar las estrategias adecuadas para la enseñanza y aprendizaje de los alumnos.

En este contexto, para ayudar a superar el bajo rendimiento de los estudiantes de la asignatura de Cálculo I de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática (FISI) de la Universidad Mayor de San Marcos proponemos como parte de la didáctica de la matemática mejorar las estrategias de enseñanza del ***modelo heurístico*** en las transformaciones algebraicas esenciales con el objeto de mejorar el logro de aprendizaje de la asignatura de Cálculo I.

Desde esta perspectiva la enseñanza del Cálculo I no puede estar centrada únicamente en los estudiantes de aceptables rendimientos sino en la de masificar e incentivar el desarrollo de habilidades matemáticas en particular las transformaciones algebraicas, para llegar a consensuar las resoluciones e interpretaciones en situaciones problemáticas cotidianas.

2.1.2 Antecedentes Teóricos

La estrategia del buen desarrollo de las transformaciones algebraicas se remonta a las evidencias encontradas en el mundo árabe cuando se inicia el desarrollo del álgebra. Luis Puig (1998) refiere que hubo muchos aportes desde los clásicos griegos, pero que fue del título del libro de Al Jhwarizmi "*Cálculo de Al- jabr*" que se toma el nombre de álgebra que se hizo muy popular por la Europa académica hasta nuestros tiempos.

Aufmann R., Lakewood J. (2013) señalan que la matemática tiene 4000 años de antigüedad, pero que sólo hace 400 años los matemáticos usamos variables para representar a los números. En el álgebra se acostumbra usar letras del alfabeto para representar a las cantidades, por ejemplo, sea x el precio de un barril del petróleo. El objetivo primordial es analizar las operaciones que intervienen para establecer conexiones a través de símbolos numéricos o alfanuméricos. Las transformaciones algebraicas se refieren a todo tipo de operaciones que involucran las expresiones algebraicas como por ejemplo los productos notables, los cocientes notables, polinomios, factorización y la racionalización que permiten la asimilación y desarrollo del Cálculo.

El sistema tradicional evalúa contenidos a través de exámenes con valoraciones cuantitativas sin considerar otros aspectos importantes de los estudiantes. El enfoque constructivista implementa ideas como el aprendizaje significativo, el aprender haciendo, el aprendizaje basado en problemas, el uso de instrumentos de evaluación con el objeto de mejorar el sistema de enseñanza aprendizaje y en particular en las matemáticas.

Vargas, G.M.G. (2007) señala que el logro académico establece una estrecha relación entre lo que se aprende y la nota obtenida (resultado de la suma de las diferentes actividades académicas del ciclo) observando que sus efectos diferenciales van según los diferentes contextos donde se realiza la actividad académica, por lo que es imposible hacer generalizaciones.

El término cálculo (del latín *calculus= piedra*), hace referencia a la noción de calcular, es decir el de realizar operaciones, transformaciones con las expresiones algebraicas. De Guzmán (2007) citado por (Castillo, 2016 p.20) señala que la resolución de problemas transmite procesos de pensamiento de manera que el estudiante pone de manifiesto su creatividad, reflexión de su propio aprendizaje, se divertirá y ganará mayor confianza en sí mismo. Entre otros temas se abordará los números reales, relaciones y funciones, límites de una función, continuidad de una función, la derivada, reglas de la derivada, razón de cambio y la optimización.

Para distinguir las diferencias entre los logros de aprendizaje de los estudiantes es preciso señalar indicadores que diferencien los niveles de logro. Los Niveles de Logro son descripciones de las habilidades y conocimientos que deben demostrar los estudiantes al responder las pruebas, para que su desempeño sea ubicado en un Nivel de Logro avanzado, medio o básico. En otras palabras, los resultados cuantitativos que se obtienen en las evaluaciones del proceso de aprendizaje son ubicados en escalas cualitativas previamente definidas.

2.1.3 Definición del Problema

Problema Principal

¿Cómo Influyen la aplicación de las transformaciones algebraicas en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos?

Problema Específico 1

¿Cómo Influyen la aplicación de los productos notables en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos?

Problema Específico 2

¿Cómo Influyen la aplicación de la factorización en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos?

Problema Específico 3

¿Cómo Influyen la aplicación de la racionalización en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos?

2.2 Finalidad y Objetivos de la Investigación

2.2.1 Finalidad

El propósito de la investigación es comprobar la eficacia del asertivo manejo de las transformaciones algebraicas en el logro de aprendizaje del cálculo I de los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de

Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos de Lima.

2.2.2 Objetivo General y Específicos

Objetivo general

Determinar la influencia de la aplicación de las transformaciones algebraicas en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Objetivos Específico 1

Determinar la influencia de los productos notables en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Objetivos Específico 2

Determinar la influencia de la factorización en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Objetivos Específico 3

Determinar la influencia de la racionalización en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

2.2.3 Delimitaciones del Estudio

En primer término, debo mencionar que la investigación se desarrollará con los estudiantes del aula 102 del primer ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática (FISI) de la Universidad Nacional

Mayor de San Marcos (UNMSM) durante el ciclo 2017-I desde abril a julio del presente año.

Este estudio estuvo conformado por 40 alumnos del aula antes mencionada de la FISI, con el permiso del profesor Luis Milla García y la autorización del director de la escuela de Ingeniería de Sistemas, Ing. Augusto Parcemón Cortez Vásquez.

Las variables utilizadas en el trabajo de investigación fueron: Las transformaciones algebraicas y el logro de aprendizaje de la asignatura de cálculo I.

2.2.4 Justificación e Importancia del Estudio

Desde la época de estudiante en el colegio y por sobre todo en la universidad he observado enormes deficiencias en la enseñanza de las transformaciones algebraicas, carentes de metodología y uso de una adecuada didáctica de la matemática, razón por la cual deseo investigar en la asignatura de cálculo I las bondades que tiene la asertiva enseñanza del manejo de las transformaciones algebraicas.

El manejo asertivo de las transformaciones algebraicas permite entre otras cosas resolver situaciones problemáticas complejas, simplificar expresiones algebraicas para encontrar sus equivalentes y determinar límites aparentemente complicados, determinar números críticos, optimizar, resolver ecuaciones de segundo, de tercer grado, etc. La idea es que los estudiantes sean "protagonistas" de su propio aprendizaje.

Se justifica en el tiempo dado que la experiencia obtenida en la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática, se puede hacer extensivo a otras facultades donde se enseña la misma asignatura, además los resultados servirán, en primer lugar, al Decano de la Facultad de Ingeniería Sistemas e Informática y a sus directores para que en los siguientes ciclos se corrijan algunas deficiencias que pueda haber y se fortalezcan aquellos aspectos que resultaron buenos en la aplicación.

Bajo los argumentos señalados existen evidencias suficientes que justifican la investigación y la importancia de abordar esta temática para la educación universitaria, debido a que la enseñanza de las matemáticas y en especial de la resolución de problemas a través de las transformaciones algebraicas contribuyen hacer realidad algunos de los fines que la educación peruana establece:

"Formar personas capaces de lograr su realización ética, intelectual, artística, cultural, afectiva, física, espiritual y religiosa, promoviendo la formación y consolidación de su identidad y autoestima y su integración adecuada y critica a la sociedad para el ejercicio de su ciudadanía en armonía con su entorno, así como el desarrollo de sus capacidades y habilidades para vincular su vida con el mundo del trabajo y para afrontar los incesantes cambios en la sociedad y el conocimiento"

Ley General de Educación (Art. 9°, 2003)

Así mismo, esta temática es importante para la Universidad Nacional Mayor de San Marcos donde se realiza la investigación, porque a partir de los resultados obtenidos se puede generar cambios metodológicos en la enseñanza de las matemáticas, y en particular, de la resolución de problemas en dicha área. Para los estudiantes, es vital, porque les permite el desarrollo de competencias.

2.3 Hipótesis y Variables

2.3.1 Supuestos Teóricos

Godino J., Batanero C. y Font V. (2003) señalan que no cabe duda de que la resolución de problemas es el medio esencial para lograr el aprendizaje en base a la práctica permanente, explorando, bosquejando, persistiendo para adquirir confianza y modos de pensamiento adecuado que les sean útiles para resolver situaciones problemáticas de la vida diaria. En consecuencia, los problemas aparecen primero para la construcción de objetos matemáticos y su aplicación a diferentes contextos.

En otra sección los autores destacan a Polya quién sostiene que la resolución de problemas tiene cuatro fases: 1) Comprender el problema, 2) Concebir un plan, 3) Ejecutar el plan, 4) Examinar la solución obtenida. Por otro lado, señalan que la dificultad que tienen los humanos para resolver problemas es sustentada por Schoenfeld quién propone cuatro componentes: 1) Recursos cognitivos (hechos y procedimientos), 2) Heurísticas (reglas), 3) Control (uso de recursos), 4) Sistema de creencias (perspectiva de la matemática), (Godino et al., 2003).

La transformación algebraica es esencial para el conocimiento matemático, la formulación de conjeturas, la justificación de resultados, sobre distintos contenidos matemáticos y diferentes niveles de complejidad, de manera que los estudiantes aprecien que las matemáticas tienen sentido.

Figueroa C. (2004) sostiene que el logro de aprendizaje se conecta con el rendimiento en el área de matemática definida como producto de la asimilación del contenido de los programas de estudio, los cuales son expresados cuantitativamente en calificaciones dentro de una escala convencional. En otras palabras, se refiere al resultado cuantitativo que se obtiene en el proceso de aprendizaje de conocimientos, conforme a las evaluaciones que realiza el docente mediante diversas pruebas y otras actividades complementarias.

2.3.2 Hipótesis Principal y Específicas

Hipótesis principal

La aplicación de las transformaciones algebraicas influye positivamente en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Hipótesis Específica 1

La aplicación de los productos notables influye positivamente en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Hipótesis Específica 2

La aplicación de la factorización influye positivamente en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Hipótesis Específica 3

La aplicación de la racionalización influye positivamente en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

2.3.3 Variables e Indicadores

Variable Independiente: Aplicación de las Transformaciones algebraicas

Variable Dependiente: El logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la FISI de la UNMSM.

Variable Independiente: Aplicación de las Transformaciones Algebraicas	
DIMENSIONES	INDICADORES
Productos Notables	✓ Efectúa adecuadamente un producto notable. ✓ Comprende el significado de una multiplicación rápida. ✓ Usa las técnicas asertivamente los productos notables

Factorización	✓ Determina el número de factores primos de un producto. ✓ Calcula el número de factores de un producto con asertividad. ✓ Utiliza adecuadamente las técnicas de la factorización.
Racionalización	✓ Determina correctamente la racionalización del denominador de la fracción. ✓ Calcula adecuadamente cualquier caso de racionalización. ✓ Resuelve con asertividad la transformación de la expresión algebraica.
Variable Dependiente: El logro de aprendizaje del cálculo I	
DIMENSIONES	INDICADORES
Resolución de problemas	Nivel avanzado (17 ≤ nota ≤ 20)
	Nivel medio (13 ≤ nota ≤ 16)
	Nivel básico (9 ≤ nota ≤ 12)
	Nivel deficiente (nota ≤ 8)

Fuente: Elaboración propia.

CAPÍTULO III: Método, Técnica e instrumentos

3.1 Población y Muestra

La Población estuvo conformada por todos los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

N° de estudiantes	Grupo
40	Experimental

La muestra es poblacional y de tipo no probabilístico intencional del I ciclo del aula 102 ya que la FISI-UNMSM dispone de las matrículas y elaboración de horarios para la asignación de secciones a los docentes de la asignatura. Es decir, el investigador no puede disponer de los estudiantes para agruparlos en un aula y obtener una muestra probabilística. Sin embargo, Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (2014) sostienen que una muestra no probabilística desde la visión cuantitativa es útil para determinado diseño de estudio no tanto por su *representatividad* de la población sino por una cuidadosa y controlada elección de características específicas del objeto de estudio.

3.2 Diseño a utilizar en el Estudio

Diseño pre experimental

La investigación planteada se caracteriza por ser del nivel aplicado, busca confrontar la teoría con la realidad. Tamayo (2012:45) citado por (Reynaga y Ruiz, 2014) sostiene que "Es el estudio y aplicación de la investigación a problemas concretos, en circunstancias y características concretas. Esta forma de investigación se dirige a su aplicación inmediata y no al desarrollo de teorías."

El enfoque es cuantitativo debido a que la metodología se basa en la construcción y medición de dimensiones, indicadores e índices de variables y los datos deben responder a estos factores, por tanto,

tendrán validez si son verificables o no, lo cual quiere decir que deben ser observados y contrastados de alguna forma.
El diseño es pre- experimental con pre test y post test con un solo grupo. Para Pino, 2010 citado por (Reynaga y Ruiz, 2014) “En este tipo de diseño, el estudio se aplica a un grupo (G), una prueba o medición (O_1), y después se aplica un tratamiento (X) para finalmente ser evaluado nuevamente (O_2) a efectos de apreciar el comportamiento que tienen.”

Una vez elegido el grupo experimental, se aplicó el pre test; luego el grupo recibe el tratamiento experimental basado en la modelación heurística de las transformaciones algebraicas antes de afrontar el Cálculo I, por último, se les aplica una prueba post test. Este diseño se diagrama como sigue:

$$G \; : \; O_1 \xrightarrow{\quad X \quad} O_2$$

Donde:

G: Grupo experimental (Transformaciones Algebraicas)

X: Variable independiente 1

O_1: Observación al grupo, antes del experimento

O_2: Observación al grupo, después del experimento

3.3 Técnica e Instrumento de Recolección de Datos

Los instrumentos elaborados por el investigador para la recolección de datos fueron validados por los Doctores Isidoro Ruiz Arango y Marcos Medina Martínez y la Maestra Mónica Sotomayor Huamán; en primer término, la prueba piloto fue aplicado en el aula 109 a los estudiantes de Cálculo I de la FISI, para posteriormente determinar la confiabilidad de la escala empleada en el test a través del Coeficiente de Alfa de Cronbach.

TABLA N° 2 Confiabilidad del Instrumento

Estadísticas de fiabilidad	
Alfa de Cronbach	N de elementos
,832	10

TABLA N°3 Estadísticas del total de elementos

Estadísticas de total de elemento				
	Media de escala si el elemento se ha suprimido	Varianza de escala si el elemento se ha suprimido	Correlación total de elementos corregida	Alfa de Cronbach si el elemento se ha suprimido
P1	28,50	78,052	,559	,813
P2	28,53	87,844	,327	,833
P3	29,17	78,833	,520	,817
P4	28,77	77,702	,495	,820
P5	29,17	71,178	,679	,799
P6	29,17	75,730	,545	,815
P7	30,10	75,472	,587	,810
P8	28,97	80,309	,448	,824
P9	29,17	77,109	,528	,816
P10	29,77	80,461	,505	,819

Interpretación:

En el análisis se observa que la confiabilidad del instrumento es igual a **0,832** (ver tabla 2), por lo que se concluye que el instrumento es altamente confiable.

Por consiguiente, luego del análisis de la totalidad de los ítems del instrumento utilizado para medir la aplicación de las transformaciones algebraicas y el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la

UNMSM, se encontró un alfa de 0,832; con lo cual queda claro la alta confiabilidad del instrumento.

Luego se aplicó el pre test al grupo experimental (aula 102), con los resultados obtenidos en el pre test el investigador procedió al tratamiento del experimento durante el semestre 2017-I, de los diferentes contenidos de las transformaciones algebraicas. En cada una de las sesiones de aprendizaje, luego que el investigador explica y modela el contenido de las transformaciones algebraicas el docente de aula procede a aplicarlas en el cálculo I, a través de una serie de ejercicios del rally de problemas tiempo durante el cual el investigador asesora y apoya a los estudiantes.

3.4 Procesamiento de Datos

Una vez que el instrumento fue validado se procedió a aplicarlo en la muestra correspondiente y recoger información de cada unidad de estudio.

Posteriormente se elaboró una base de datos mediante el SPSS 22 para obtener tablas y figuras con frecuencias y porcentajes presentando así la estadística descriptiva.

Finalmente, para validar la hipótesis de que las transformaciones algebraicas aplicada influyen en el logro de aprendizaje del cálculo I, se realizará cuatros pruebas de hipótesis, mediante el uso de pruebas paramétricas como el T Student, de esta manera haremos uso de la estadística inferencial.

Grupo Experimental	
Pre Test	Pos Test

CAPÍTULO IV: Presentación y Análisis de los Resultados

4.1 Presentación de Resultados

Verificación y comprobación de la Normalidad del Pre test

TABLA N° 4

Resumen de procesamiento de casos						
	Casos					
	Válido		Perdidos		Total	
Notas del Pre Test	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
	40	100,0%	0	0,0%	40	100,0%

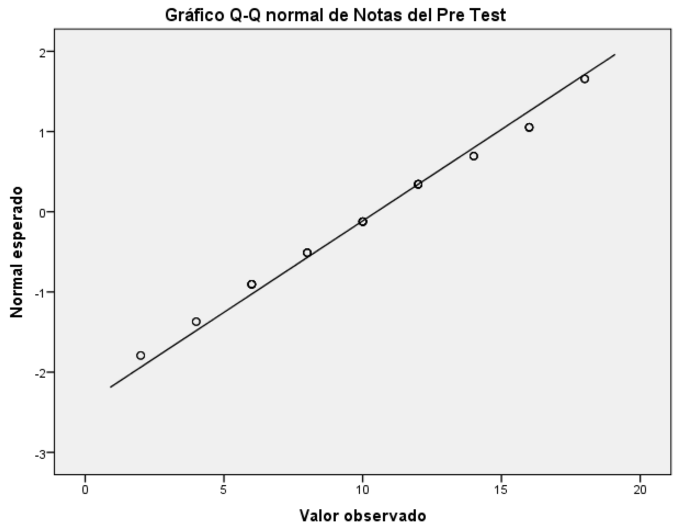
La Tabla N° 4, nos muestra los resultados de la participación del total de estudiantes (tamaño de la muestra) en el pre test para la verificación y comprobación de la Normalidad.

TABLA N° 5

Valores Descriptivos del Pre Test				
			Estadístico	Error estándar
Notas del Pre Test	Media		10,50	,693
	95% de intervalo de confianza para la media	Límite inferior	9,10	
		Límite superior	11,90	
	Media recortada al 5%		10,56	
	Mediana		10,00	
	Varianza		19,231	
	Desviación estándar		4,385	
	Mínimo		2	
	Máximo		18	
	Rango		16	
	Rango intercuartil		8	
	Asimetría		-,044	,374
	Curtosis		-,724	,733

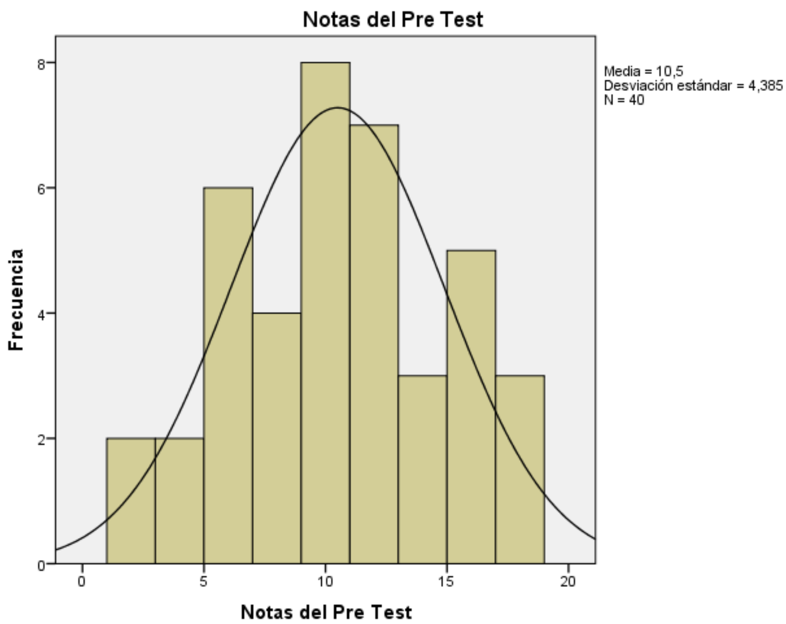
En la Tabla N° 5, se observa que en el pre test la media fue de 10,5 con una desviación típica de 4,385 y una mediana de 10.

Figura 11: Normalidad del pre Test



Fuente: Elaboración Propia (spss 22)

Figura 12: Histograma de la Normalidad del pre Test



Fuente: Elaboración Propia (spss 22)

En las figuras 11 y 12, se observa que las notas tienen un comportamiento normal sin excepciones.

TABLA N° 6

Prueba de normalidad del Pre Test						
Notas del Pre Test	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
	,105	40	,200*	,960	40	,173

En la Tabla N° 6, se observa que de acuerdo con Kolmogorov (n > 30) el p-valor de la normalidad en el pre test fue de 0,20.

Prueba de hipótesis (Normalidad)

H_0: La variable logro de aprendizaje del Cálculo I en la muestra tiene distribución normal.

H_1: La variable logro de aprendizaje del Cálculo I en la muestra no tiene distribución normal.

Nivel de significancia: 0,05 = 5%

Conclusión:

Se puede observar que el p-valor es mayor que el nivel de significancia (**0,20 > 0,05**) lo que significa que se acepta la hipótesis nula. Es decir, el logro de aprendizaje del cálculo I tiene distribución normal.

Verificación y comprobación de la Normalidad del Pre test

TABLA N° 7

Resumen de procesamiento de casos						
Notas del Pos Test	Casos					
	Válido		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
	40	100,0%	0	0,0%	40	100,0%

La Tabla N° 7, nos muestra los resultados de la participación del total de estudiantes (tamaño de la muestra) en el pos test para la verificación y comprobación de la Normalidad.

TABLA N° 8

Valores Descriptivos del Pos Test				
			Estadístico	Error estándar
Notas del Pos Test	Media		15,45	,458
	95% de intervalo de confianza para la media	Límite inferior	14,52	
		Límite superior	16,38	
	Media recortada al 5%		15,61	
	Mediana		16,00	
	Varianza		8,408	
	Desviación estándar		2,900	
	Mínimo		6	
	Máximo		20	
	Rango		14	
	Rango intercuartil		4	
	Asimetría		-,873	,374
	Curtosis		1,542	,733

En la Tabla N° 8, se observa que en el pos test la media fue de 15,45 con una desviación típica de 2,90 y una mediana de 16.

Figura 13: Normalidad del PosTest

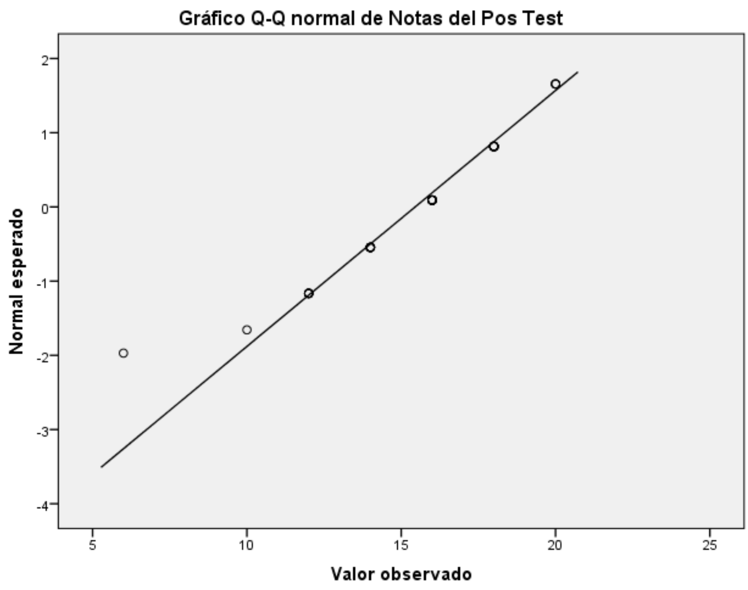
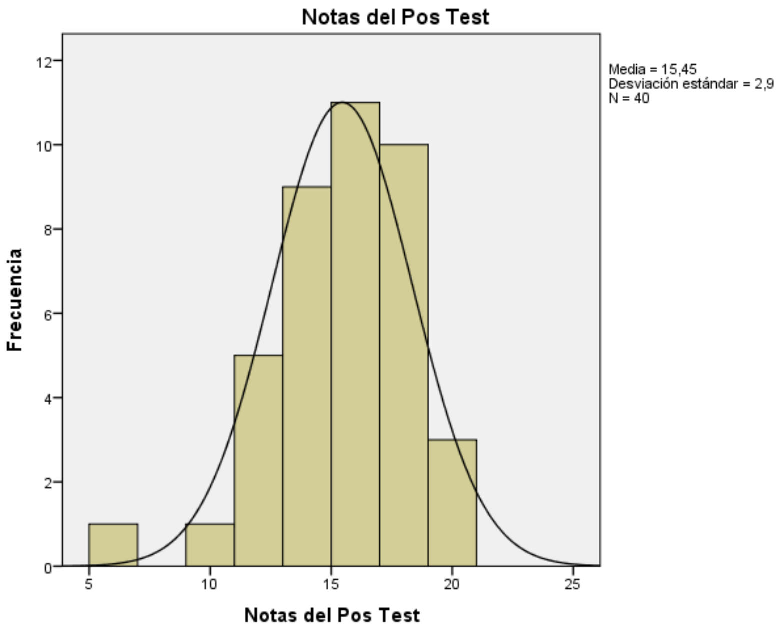


Figura 14: Histograma de la Normalidad del Pos Test



En las figuras 13 y 14, se observa que las notas no tienen un comportamiento normal dado que hay valores (outlier) alejados del resto.

TABLA N° 9

Pruebas de normalidad del Pos Test						
	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	Gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Notas del Pos Test	,175	40	,003	,918	40	,007

En la Tabla N° 9, se observa que de acuerdo con Kolmogorov (n > 30) el p-valor de la normalidad en el pos test fue de 0,003.

Prueba de hipótesis (Normalidad)

H_0: La variable logro de aprendizaje del Cálculo I en la muestra tiene distribución normal.

H_1: La variable logro de aprendizaje del Cálculo I en la muestra no tiene distribución normal.

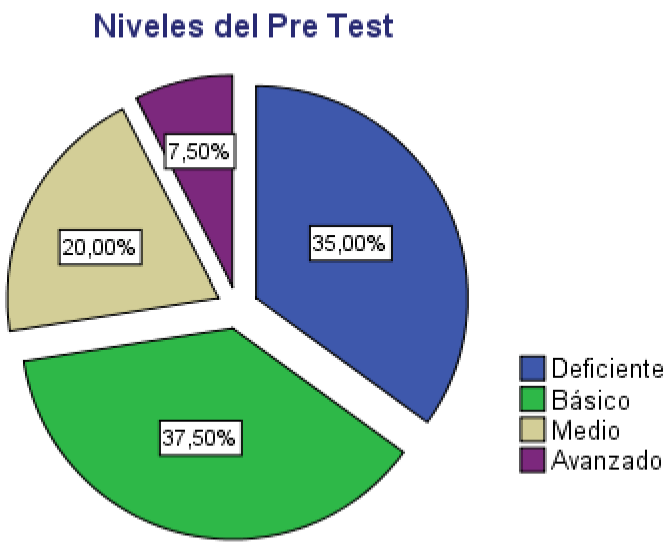
Nivel de significancia: 0,05 = 5%

Conclusión:

Se puede observar que el p-valor es menor que el nivel de significancia (**0,003 < 0,05**) lo que significa que se rechaza la hipótesis nula. Es decir, el logro de aprendizaje del cálculo I no tiene distribución normal.

Comparativos entre resultados del Pre Test vs Pos Test

Figura 15: Categorización del Pre Test

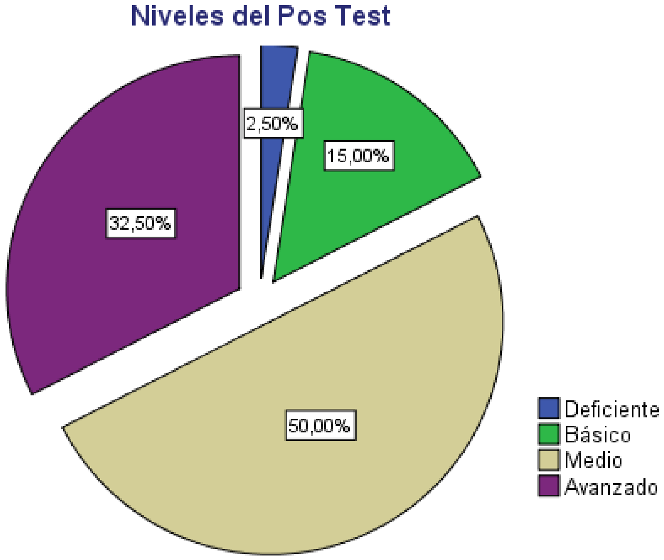


Fuente: Elaboración Propia

Interpretación:

En los resultados del Pre Test se puede observar que sólo el 27,5% (11 alumnos) logran ubicarse en los niveles medio y avanzado. En cambio, en los niveles deficiente y básico se ubican el 72,5% restante de los estudiantes.

Figura 16: Categorización del Post Test

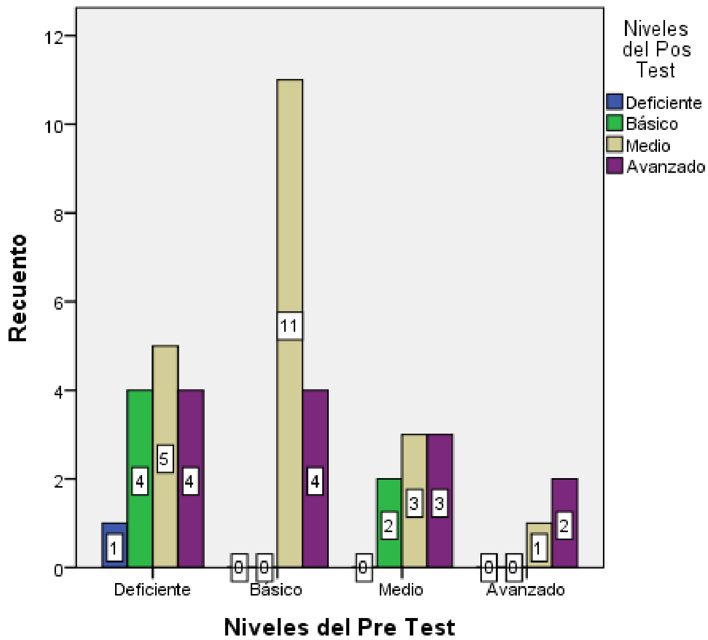


Fuente: Elaboración Propia

Interpretación:

En los resultados del Pos Test se puede observar que sólo el 17,5% (7 alumnos) se ubican en el nivel deficiente y básico; mientras que el 50% se ubican en el nivel medio y el 32,5% (13 alumnos) logran ubicarse en el nivel avanzado.

Figura 17: Comparativo del Pre Test vs Pos Test



Fuente Elaboración Propia

Interpretación:

Del nivel deficiente en el pre test logran ubicarse en los niveles medio y avanzado 9 alumnos en el pos test; mientras que del nivel básico en pre test se ubican en los niveles medio y avanzado 15 alumnos en el pos test.

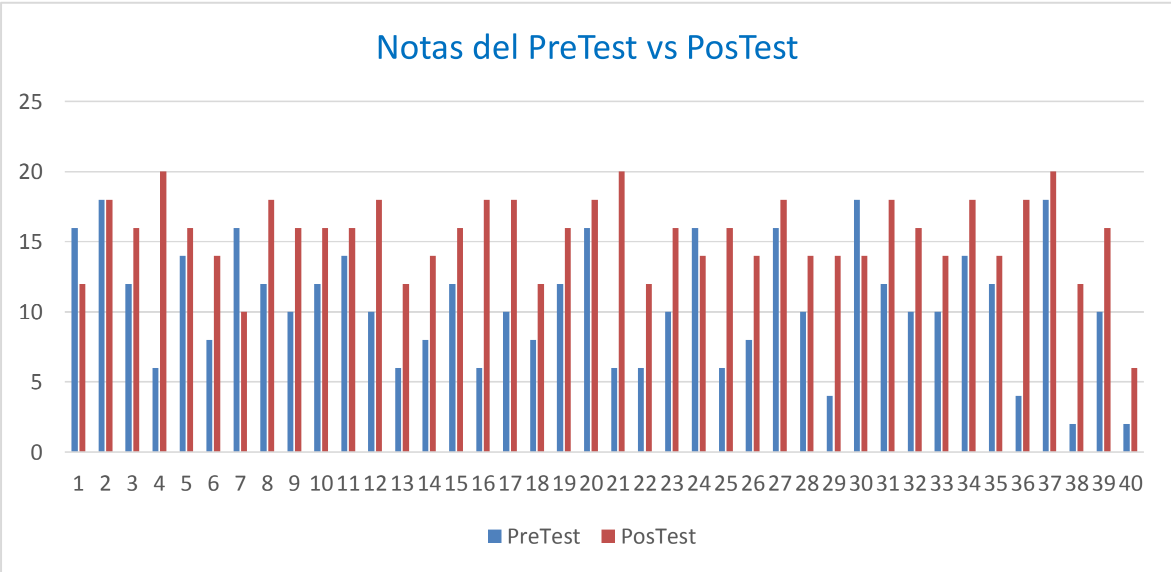
TABLA N° 10

	Nivel deficiente	Nivel Básico	Nivel Medio	Nivel Avanzado
Pre Test	35%	37,5%	20%	7,5%
Post Test	2,5%	15%	50%	32,5%

Interpretación:

De la tabla 10, queda claro que en el nivel medio/avanzado en el pre Test habían un 27,5%; en tanto que el post Test subió al 82,5%.

Figura 18: Comparativo individual del Pre Test vs Pos Test



Fuente: Elaboración Propia

Interpretación:

En la figura N°18, se observa el comportamiento de las 40 unidades de información, destacándose que el 87,5% de estudiantes mejoraron su desempeño en el pos test (barras rojas) respecto del pre test (barras azules)

4.2 Contrastación de Hipótesis

Dado que se ha demostrado que una de las hipótesis de investigación no verifican el supuesto de normalidad no se puede aplicar la prueba T student.

Cuando se quiere probar hipótesis relacionadas con la media poblacional (μ_X) de una variable X debe distribuirse según una distribución normal. Millones, R., & Barreno E., & Vásquez F. & Castillo C. (2015, pág.168).

Como procedimiento alternativo de prueba utilizaremos las pruebas no paramétricas o métodos de distribución libre quienes no suponen distribución de poblaciones normales. Walpole R., & Myers S., & Myers R. (2007, pág. 671).

Para nuestro estudio como se tratan de muestras relacionadas es conveniente utilizar la Prueba de Wilcoxon de los rangos con signo.

Prueba de hipótesis principal

$$H_0: Me_{postest} - Me_{pretest} \leq 0$$
$$H_1: Me_{postest} - Me_{pretest} > 0$$

Nivel de significancia: α = 0,05 = 5%

TABLA N° 11

Rangos		N	Rango promedio	Suma de rangos
Notas del Pos Test - Notas del Pre Test	Rangos negativos	4[a]	13,63	54,50
	Rangos positivos	35[b]	20,73	725,50
	Empates	1[c]		
	Total	40		

a. Notas del Pos Test < Notas del Pre Test
b. Notas del Pos Test > Notas del Pre Test
c. Notas del Pos Test = Notas del Pre Test

TABLA N° 12

Estadísticos de prueba de Wilcoxon	
	Notas del Pos Test - Notas del Pre Test
Z	-4,715[b]
Sig. asintótica (bilateral)	**,000**

a. Prueba de Wilcoxon de los rangos con signo
b. Se basa en rangos negativos.

Conclusión:

De acuerdo con los resultados mostrados en la Tabla N°12, se observa que el p-valor ($\frac{0,000}{2} = 0,0000$) es menor que el nivel de significancia (0,05) *es decir (0,000 < 0,05)*; por consiguiente, se rechaza la hipótesis nula, lo que significa que se aprueba la hipótesis alterna. Por lo tanto, con un nivel de confianza del 95% se afirma que la mediana obtenida en el pos test es mayor que la mediana obtenida en el pre test; comprobándose que la aplicación de las transformaciones algebraicas influye positivamente en el logro de aprendizaje del cálculo I, por consiguiente, mejoran significativamente el rendimiento de los estudiantes del primer ciclo de la facultad de ingeniería de sistemas e informática de la UNMSM.

Prueba de hipótesis específica 1

$$H_0 : Me_{postest} - Me_{pretest} \leq 0$$
$$H_1 : Me_{postest} - Me_{pretest} > 0$$

Nivel de significancia: α = 0,05 = 5%

TABLA N° 13

Rangos		N	Rango promedio	Suma de rangos
Notas del PosE1 - Notas del PreE1	Rangos negativos	4[a]	10,25	41,00
	Rangos positivos	26[b]	16,31	424,00
	Empates	10[c]		
	Total	40		

a. Notas del PosE1 < Notas del PreE1
b. Notas del PosE1 > Notas del PreE1
c. Notas del PosE1 = Notas del PreE1

TABLA N° 14

Estadísticos de prueba[a]	
	Notas del PosE1 - Notas del PreE1
Z	-4,000[b]
Sig. asintótica (bilateral)	**,000**

a. Prueba de Wilcoxon de los rangos con signo
b. Se basa en rangos negativos.

Conclusión:

De acuerdo con los resultados mostrados en la Tabla N°14, se observa que el p-valor ($\frac{0,000}{2} = 0,0000$) es menor que el nivel de significancia (0,05) *es decir (0,000 < 0,05)*; por consiguiente, se rechaza la hipótesis nula, lo que significa que se aprueba la hipótesis alterna. Por lo tanto, con un nivel de confianza del 95% se afirma que la mediana obtenida en el post test es mayor que la mediana obtenida en el pre test; comprobándose que la aplicación de los productos notables influye positivamente en el logro de aprendizaje del cálculo I, por consiguiente, mejoran significativamente el rendimiento de los estudiantes del primer ciclo de la facultad de ingeniería de sistemas e informática de la UNMSM.

Prueba de hipótesis específica 2

$$H_0 : Me_{postest} - Me_{pretest} \leq 0$$
$$H_1 : Me_{postest} - Me_{pretest} > 0$$

Nivel de significancia: α = 0,05 = 5%

TABLA N° 15

Rangos				
		N	Rango promedio	Suma de rangos
Notas del PosE2 - Notas del PreE2	Rangos negativos	4[a]	13,00	52,00
	Rangos positivos	27[b]	16,44	444,00
	Empates	9[c]		
	Total	40		

a. Notas del PosE2 < Notas del PreE2

b. Notas del PosE2 > Notas del PreE2

c. Notas del PosE2 = Notas del PreE2

TABLA N°16

Estadísticos de prueba[a]	
	Notas del PosE2 - Notas del PreE2
Z	-3,915[b]
Sig. asintótica (bilateral)	**,000**

a. Prueba de Wilcoxon de los rangos con signo

b. Se basa en rangos negativos.

Conclusión:

De acuerdo con los resultados mostrados en la Tabla N°16, se observa que el p-valor ($\frac{0,000}{2} = 0,0000$) es menor que el nivel de significancia (0,05) *es decir (0,000 < 0,05)*; por consiguiente, se rechaza la hipótesis nula, lo que significa que se aprueba la hipótesis alterna. Por lo tanto, con un nivel de confianza del 95% se afirma que la mediana obtenida en el post test es mayor que la mediana obtenida en el pre test; comprobándose que la aplicación de la factorización influye positivamente en el logro de aprendizaje del cálculo I.

Prueba de hipótesis específica 3

$$H_0 : Me_{postest} - Me_{pretest} \leq 0$$
$$H_1 : Me_{postest} - Me_{pretest} > 0$$

Nivel de significancia: α = 0,05 = 5%

TABLA N° 17

Rangos				
		N	Rango promedio	Suma de rangos
Notas del PosE3 - Notas del PreE3	Rangos negativos	4[a]	11,13	44,50
	Rangos positivos	26[b]	16,17	420,50
	Empates	10[c]		
	Total	40		

a. Notas del PosE3 < Notas del PreE3
b. Notas del PosE3 > Notas del PreE3
c. Notas del PosE3 = Notas del PreE3

TABLA N°18

Estadísticos de prueba[a]	
	Notas del PosE3 - Notas del PreE3
Z	-3,938[b]
Sig. asintótica (bilateral)	**,000**

a. Prueba de Wilcoxon de los rangos con signo
b. Se basa en rangos negativos.

Conclusión:

De acuerdo con los resultados mostrados en la Tabla N°18, se observa que el p-valor ($\frac{0,000}{2} = 0,0000$) es menor que el nivel de significancia (0,05) *es decir (0,000 < 0,05)*; por consiguiente, se rechaza la hipótesis nula, lo que significa que se aprueba la hipótesis alterna. Por lo tanto, con un nivel de confianza del 95% se afirma que la mediana obtenida en el post test es mayor que la mediana obtenida en el pre test; comprobándose que la aplicación de la racionalización influye positivamente en el logro de aprendizaje del cálculo I, por consiguiente, mejoran significativamente el rendimiento de los estudiantes del primer ciclo de la facultad de ingeniería de sistemas e informática de la UNMSM

4.3 Discusión de Resultados

Luego de la aplicación de las transformaciones algebraicas en el grupo experimental quedó demostrado su influencia positiva en el logro de aprendizaje del cálculo I. Los resultados se evidencian en la figura N°18 y la tabla N°12 mejorando de manera significativa sus rendimientos en el cálculo I, de manera similar en su tesis de maestría Reynaga &Ruiz (2014) comprobaron la influencia positiva de los métodos de Polya y ABP en el rendimiento matemático.

Por otro lado, sintetizando los resultados obtenidos en la investigación, se evidencia la mejora de los rendimientos en el cálculo I del 87,5% de los estudiantes, corroborándose los resultados obtenidos por Ruiz (2015) en tesis doctoral donde señala que mejoraron su rendimiento académico más de los tres cuartos de los estudiantes (76,6%) gracias a la influencia del trabajo colaborativo. El resumen de la investigación se observa en la tabla N°19.

TABLA N°19

Grupo	Tratamiento	Influye positivamente	Se mantiene igual	No Influye	Total
Experimental	Transformaciones Algebraicas	35	1	4	40
		87,5%	2,5%	10%	100%

Fuente: Elaboración Propia

Además, los resultados descriptivos que se evidencian en las tablas N° 5 y 8 nos muestran que los promedios (tanto de la media como la mediana) en el post test son mayores que las obtenidas en el pre test, como también lo afirman Domínguez & Robledo (2009) en su investigación señalando que el promedio del post test es mayor que el pre test corroborando que el plan de acción jugando con la matemática influye positivamente en el logro de las capacidades matemática.

Otro resultado importante que se evidencia comparando las figuras N° 15 y 16 es que en el pre test se ubicaron en el nivel avanzado el 7,5% de estudiantes mientras que en el post test lo logró el 32,5% de los estudiantes mejorando sus rendimientos en el cálculo en este nivel académico el 25%. También Irazoqui (2015) demostró mejor aprendizaje del cálculo diferencial tan sólo implementando un diseño curricular modular considerando las transformaciones algebraicas como parte de un módulo.

También, Alcalde (2010) en su tesis doctoral demostró que el nivel de conocimientos matemáticos de estudiantes que asisten al curso cero (previo al cálculo) es mejor que los que no asisten.

Finalmente, es preciso señalar que los logros de aprendizaje del cálculo I se optimizan en todo el proceso del ciclo universitario como se evidencian en las figuras N°16 y 17 donde se observa que sólo el 17,5% se ubican en el nivel deficiente-básico, un contundente 50% en el nivel medio y el 32,5% en el avanzado. Resultados avalados por Ruiz (2015) quién señala que los niveles de logro se enriquecen a lo largo de un ciclo desarrollando competencias de lo simple a lo complejo y Backhoff (2011) quién señala la facilidad de interpretación de resultados al jerarquizar en categorías que van de menos a más respecto de sus habilidades y conocimientos.

.

CAPÍTULO V: Conclusiones y Recomendaciones

5.1 Conclusiones

1. Los resultados obtenidos y comprobados con la prueba de hipótesis evidencian que la aplicación de las transformaciones algebraicas influye positivamente en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la UNMSM.

2. La aplicación de las transformaciones algebraicas incrementó el logro de aprendizaje de los estudiantes del I ciclo de la FISI-UNMSM en un 82,5% en general, de los cuales el 32,5% logra el nivel avanzado y el 50% logra el nivel medio.

3. La aplicación de los productos notables influye positivamente en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la UNMSM.

4. La aplicación de la racionalización influye positivamente en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la UNMSM.

5. La aplicación de la factorización influye positivamente en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la UNMSM.

5.2 Recomendaciones

1. Incorporar la aplicación de un ciclo introductorio que abarque los temas de las transformaciones algebraicas en la FISI-UNMSM, con problemas contextualizados a su especialidad que permitan realizar las conexiones entre lo teórico y lo práctico de la realidad en él que se desenvuelve.

2. Capacitar a los docentes del área de Matemática de la FISI-UNMSM en la aplicación de nuevas estrategias didácticas de las matemáticas, para una efectiva realización de su desempeño profesional y que permita al estudiante desarrollar sus competencias y aprendizaje autónomo.

3. Impulsar la ambientación y equipamiento con software matemático para potenciar la aplicación de las nuevas estrategias didácticas de las matemáticas y generar un ambiente flexible e innovador haciendo uso de la TIC´s.

4. Promover en las diferentes escuelas de la FISI de la UNMSM el uso de las nuevas estrategias didácticas en las matemáticas y generar el desarrollo de competencias, habilidades sociales y trabajo en equipo, para que progresivamente se implemente en otras asignaturas.

5. Implementar el uso de tutoriales, videos de resolución de problemas, que permitan profundizar los contenidos matemáticos y generar la incorporación de trabajos colaborativos virtuales.

BIBLIOGRAFÍA

1. Alcalde Esteban, Manuel (2010). *Importancia de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes para el aprendizaje de la didáctica de la matemática en las titulaciones de maestro en la Universitat Jaume I.* Tesis doctoral. UJ. España.

2. Angel, A. R. & Runde, D. C. (2011). *Elementary and Intermediate Algebra for College Students*. Prentice Hall.

3. Aufmann R. & Lockwood J. (2013). *Álgebra. Elemental*. Cengage Learning, 8a. Ed. Mexico.

4. Backhoff, E. (2011). *La inequidad educativa en México: Diferencias en el aprendizaje de la comprensión lectora en educación básica*.

5. Barreto, J. C. (2009). *Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica*. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 71, 57-74.

6. Bruning, R. H., Schraw, G. J., Norby, M. M. y Ronning, R. R. (2004). *Cognitive psychology and instruction* (4a. ed.). Upper Saddle River, NJ: Merrill/Prentice Hall.

7. Byrnes, J. P. (1996). *Cognitive development and learning in instructional contexts*. Boston: Allyn and Bacon.

8. Carbonero Martín, M. Á., & Coromoto Navarro Zavala, J. (2006). *Entrenamiento de alumnos de Educación Superior en estrategias de aprendizaje en matemáticas*. *Psicothema*, *18*(3).

9. Castillo, W. (2016). *Así estamos enseñando matemáticas*. Guatemala: Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa, Ministerio de Educación.

10. Collette, J. P. (1985). *Historia de las matemáticas.* España: Siglo Veintiuno Editores.

11. Carreño X. & Cruz X. (2006). *Álgebra*. Arrayan Editores. Santiago de Chile. Chile.

12. Demana, F., Waits B. & Foley G.& Kennedy (2007). *Pre cálculo: gráfico, numérico, algebraico.* Sétima Edición. Pearson Educación. México.

13. De Guzmán, M. de (2007, enero - abril). "*Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*". Revista Iberoamericana de Educación, Núm. 43. Disponible en: http://www.rieoei.org/rie43a02.htm Consultado: 15/09/2009.

14. De Guzmán, M. (1992). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Olimpíada Matemática Argentina.

15. Del Valle M.& Curotto M. (2008). *La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje*. Revista electrónica de las ciencias vol 7 n°2 p. 464.

16. Domínguez H. & Robledo D. (2009). *Influencia del plan de acción "Jugando con la matemática" basado en la metodología activa en el logro de las capacidades del área de matemática en los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la I.E. P.N.P "Bacilio Ramírez Peña", Piura – 2008.* Tesis de Maestría. UCV. Perú.

17. Duncan, R. M. (1995). *Piaget and Vygotsky revisited: Dialogue or assimilation?* Developmental Review, 15, 458-472.

18. Educativo de México, Panorama (2012). *Indicadores del sistema educativo nacional*. México, DF: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

19. Equipo de especialistas de las Direcciones de Educación Inicial, Primaria y Secundaria. (2009). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. MINEDU. Lima.

20. Figueroa C. (2004). *Sistemas de Evaluación Académica.* Primera edición. El salvador. Editorial universitaria. España.

21. Hernández, R., Fernández, C.,Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (No. 303.1). McGraw-Hill Education.

22. Gaulin, C. (2001). *Tendencias actuales de la resolución de problemas*. *Sigma*, *19*, 51-63.

23. Godino J., Batanero C. y Font V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Proyecto Edumat - Maestros. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

24. Gómez Aguirre, Alejandro (2010). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de ordenación y combinación con estudiantes de educación superior: Un enfoque basado en la resolución de problemas.* Tesis Doctoral. UB. España.

25. Guthrie, E. R. (1959). *Association by contiguity. En S. Koch (Ed.), Psychology: A study of a science* (Vol. 2, pp. 158-195). Nueva York: McGraw-Hill.

26. Hilgard, E. R. (1996). *Perspectives on educational psychology*. Educational Psychology Review, 8, 419-431.

27. Hollis, K. L. (1997). *Contemporary research on Pavlovian conditioning: A "new" functional analysis*. American Psychologist, 52, 956-965.

28. Irazoqui Becerra Elías (2015). E*l aprendizaje del cálculo diferencial: una propuesta basada en la modularización* aplicada en el campus de Chillán de la Universidad del Bío-Bío. Tesis Doctoral. UNED. España.

29. Karpov, Y. V. y Haywood, H. C. (1998). T*wo ways to elaborate Vygotsky's concept of mediation: Implications for instruction*. American Psychologist, 53, 27-36.

30. Larson, R. & Falvo D. (2011). *Pre cálculo*. Cengage Learning Editores., Octava edición. México.

31. Larson, R. & Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable*. McGraw Hill/ Interamericana Editores S.A. de C.V. Novena edición. México.

32. Leithold, L. (1998). *El cálculo* (Vol. 7). Oxford University Press.

33. Leithold, L. (2007). *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica*. Planeación y Servicio Editorial S.A. México.

34. Millones, R., & Barreno E., & Vásquez F. & Castillo C. (2015). *Estadística Aplicada a la ingeniería y negocios*. Universidad de Lima. Fondo Editorial 2015.

35. Minedu (2003). Ley general de educación 28044. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/p/ley_general_de_educacion_28044.pdf.

36. McKeachie, W. J. (1990). *Learning, thinking, and Thorndike*. Educational Psychologist, 25, 127-141.

37. Medina A.M & Aucallanchi F.B. (2012). *Aplicación de Dos Técnicas Didácticas y sus Efectos en el Rendimiento Académico en Matemática en Instituciones Educativos Privadas de Piura, Chiclayo, Cajamarca y Trujillo – Habilidades generales Matemáticas –Modelación Matemática.* Tesis de Maestría. UIGV. Perú.

38. Minedu (2013). *¿Qué logros de aprendizaje en matemática muestran los estudiantes al terminar la primaria?* UMC

39. Müller, H. (1985). El trabajo heurístico en la enseñanza de la Matemática. *Material mimiografiado, Ciudad de La Habana*.

40. Murray R. & Moyer R.(2007). *Algebra superior Serie Schaum.* McGraw Hill, Interamericana. Mexico.

41. Nalda, Urko (2014). *Factorización.* Universidad de la Rioja, servicio de publicaciones, 2014. Publicaciones.unirioja.es

42. Peral, L. M. *Las Matemáticas en el Antiguo Egipto*. *Apuntes de historia de las matemáticas*, *1*.

43. Pérez, A., Ramón, J., & Sánchez, J. (2000). *Análisis exploratorio de las variables que condicionan el rendimiento académico*. Sevilla: Universidad Pablo de Olavide.

44. Pino Gotuzzo, Raúl. (2010). *Metodología de la Investigació*n. Lima: Editorial San Marcos, pp. 78-79.

45. Polya, G. (1982). *Como plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.

46. Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo (PRONABEC). (2012). *El alto rendimiento escolar para beca 18*. MINEDU. Lima.

47. Puig, L. (2003). *Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas desde el punto de vista de la matemática educativa*.

48. Puig, L. (1998). *Componentes de una historia del álgebra*. *El texto de al-Khwarizmi restaurado. Investigaciones en matemática educativa II. Universitat de Valencia. Detartament de Didáctica de la matemática*, 109-131.

49. Reynaga O. & Ruiz I. (2014). *Aplicación de los métodos de Polya y ABP en el rendimiento matemático de los estudiantes del I.E.P Jean Piaget del distrito de Carabayllo. Tesis de Maestría UIGV. Perú.*

50. Rodríguez, S., Fita, E., & Torrado, M. (2004). *El rendimiento académico en la transición secundaria-universidad*. Revista de educación, 334, 391-414.

51. Rosas, N. C., & Oliveros, E. (2014). *La Matemática Superior y las Competencias "Estrategia De Implementación de Competencias Matemáticas*". *Gaceta Sansana*, *1*(4).

52. Ruiz, I. (1999). *Teoría de los Números*. Primera edición. Editorial San Marcos. Lima, Perú.

53. Ruiz, I. (2015)**.** *El trabajo colaborativo y el logro de aprendizaje de la asignatura de estadística descriptiva en los estudiantes del II ciclo de la Facultad de Ciencias de la Comunicación de la Universidad Tecnológica del Perú*. Tesis de Doctorado UIGV. Perú.

54. Santaolalla E. (2009, octubre 4). *Matemáticas y estilos de aprendizaje*. Recuperado de http://www2.uned.es/revistaestilosdeaprendizaje/numero_4/Artigos/lsr_4_articulo_4.pdf

55. Santos, Manuel (2007). *La Resolución de Problemas Matemáticos. Fundamentos cognitivos*. Editorial Trillas. México.

56. Schunk, D. H. (2012). *Teorías del aprendizaje: una perspectiva educativa*. Pearson Education. Sexta edición. México.

57. Skinner, B. F. (1953). *Science and human behavior*. Nueva York: Free Press.

58. Stedall, J. A., & Harriot, T. (2003). *The greate invention of algebra: Thomas Harriot's treatise on equations*. Oxford University Press on Demand.

59. Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). *Pre cálculo*. Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición. Cengage Learning, Mexico.

60. Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). *Pre cálculo*. Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición. Cengage Learning, Mexico.

61. Swokowski, E. W. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Cengage Learning Editores.

62. Tamayo, M. (2012). El Proceso de la Investigación Científica. Sexta Edición. Editorial Limusa. México.

63. Tudge, J. R. H. y Scrimsher, S. (2003). *Lev S. Vygotsky on education: A cultural-historical, interpersonal, and individual approach to development*. En B. J. Zimmerman y D. H. Schunk (Eds.), Educational psychology: A century of contributions (pp. 207-228). Mahwah, NJ: Erlbaum.

64. UDEP (2016). *A dónde van las matemáticas en el Perú*. Recuperado de http://udep.edu.pe/hoy/2016/a-donde-van-las-matematicas-en-el-peru/

65. Valdez, Eréndira (2000). *Rendimiento y Actitudes. La Problemática de las Matemáticas en la Escuela Secundaria.* Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. México.

66. Vargas, G. M. G. (2007). *Factores asociados al rendimiento académico en estudiantes universitarios, una reflexión desde la calidad de la educación superior pública*. *Revista educación*, *31*(1), 43-63.

67. Vélez Van, M. A., Roa, N. C. (2005). *Factors associated with academic perfomance in medical students*. En: PSIC. Educación Médica. 2(8), 1-10.

68. Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

69. Walpole, R. E., Myers, R. H., & Myers, S. L. (2007). *Probabilidad y estadística para ingenieros*. Pearson Educación.

70. Watson, J. B. (1924). *Behaviorism*. Nueva York: Norton.

71. Zill, D. G., Wright, W. S., Velázquez, Y. V., Roij, S. B., & Hernández, K. R. Z. (2011). *Cálculo: trascendentes tempranas*. McGraw-Hill Interamericana.

72. Zill, D. G., & Dewar, J. M. (2012). *Pre cálculo con avances de cálculo*. McGraw Hill, Bogotá Colombia.

ANEXOS

INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

PRUEBA SOBRE RESOLUCIÓN
DE PROBLEMAS DE CÁLCULO I

Apellidos: ……………………………………….

Nombres: ………………………………………….

Fecha: / / . FISI - CICLO I

Indicaciones: Resolver con lapicero azul/negro. TIEMPO: 90 minutos

---

1. El recíproco de $\left(\dfrac{4}{3x-4}\right)$ más el opuesto de (x+3) es igual al elemento neutro aditivo. Halle el valor de "x".

   A) -12 B) 12 C) -16 D) 16 E) 20

2. El Sr. Román le regala un celular a su sobrina Yanira, ella le pregunta al tío ¿Qué capacidad en gigabytes tiene la memoria? Don Román le contesta: La cantidad de gigabytes está dado por la suma de los 5 primeros enteros del dominio de la siguiente función: $f(x)=\dfrac{\sqrt{6x-2}-3}{x^2+1}$. Ayude a Yanira a encontrar la respuesta correcta.

   A) 12 B) 15 C) 16 D) 20 E) 24

3. Carlos le pregunta a Oscar, ¿Cuántos días quedan para tu cumpleaños? Oscar le responde, el número de días que faltan para mi cumpleaños está dado por la suma de los 4 primeros enteros que satisfacen la siguiente desigualdad $\dfrac{x^2+4x-12}{x^2-x-2}>1$. Colabore con Carlos y encuentre el número de días correspondiente.

   A) 14 B) 10 C) 15 D) 12 E) 8

4. Gloria y Luz practican en un laboratorio de la FISI, cuando Gloria pregunta a Luz ¿La configuración de tu laptop, cuántos bits tiene? Luz le responde que el número

de bits está dado por el valor del siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 4}$ elevado a la potencia 5. Si tu fueras Gloria, marca el resultado correcto.

A) 64 B) 32 C) 1 D) 243 E) 1024

5. Durante una clase de matemática, Jorge le pregunta al profesor ¿cuantas preguntas vendrán en el examen parcial? El profesor le responde que el número de preguntas está dado por el valor del siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$. Ayude a Jorge a encontrar el resultado.

A) 2 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

6. La empresa "torbellino" registra que la producción semanal de sus productos es de "**a**" toneladas. Por razones de seguridad el gerente de producción lo anota con la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & si\ x \neq 3 \\ a, & si\ x = 3 \end{cases}$$

Determine el valor de "**a**" para que la función sea continua en x = 3.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7. Encuentre los números críticos de la siguiente función, si es posible $f(x) = x^4 - 4x^2$

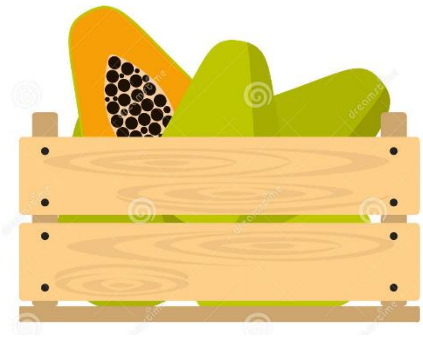
A) -2; 0; 2 B) 0; 1; 2 C) $0; -2; \sqrt{2}$

D) $-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}$ E) $0; -\sqrt{2}; 2$

8. Un fabricante descubrió que el costo total esta dado por: $C(x)=2x^3-15x^2+36x$, cuando se producen "x" unidades a) ¿Qué nivel de producción genera el mínimo costo? b) Calcular el costo mínimo.

A) 2; 32 B) 4; 36 C) 3; 27
D) 3; 32 E) 4; 32

9. Se estima que dentro de x meses la población de una cierta comunidad estará dada por: $P(x) = x^2 + 20x + 8000$ personas.
a) ¿A qué ritmo cambiará la población dentro de 15 meses?
b) ¿Cuánto cambiará realmente la población durante el decimosexto mes?
A) 50; 51 B) 51; 52 C) 52; 53 D) 53; 54 E) 54; 55



10. En la hacienda de Lamas, ubicada a 30km de la ciudad de Tarapoto, se estima que el precio de producción de cada cajón de papaya es de S/. 3. Al fijar en "x" soles el precio del cajón, el dueño de la hacienda espera vender (50-5x) cajones de papaya. ¿A qué precio debe ser vendido el cajón de papaya para que el agricultor obtenga la máxima utilidad?

A) S/. 4,5 B) S/. 5 C) S/. 5,5 D) S/. 6 E) S/. 6,5

DISEÑO DE CLASE N°1

Nombre del curso: **Matemática I**
Unidad de Aprendizaje: Productos Notables 1
Tema: Suma y Diferencia de un binomio al cuadrado
Diferencia de cuadrados.

Logro de Aprendizaje de la Sesión: Al finalizar la sesión de aprendizaje el estudiante reconoce y aplica conceptos de binomio al cuadrado y diferencia de cuadrados en la resolución de ejercicios y problemas.

Fases y Tiempo	**Descripción de la Actividad o la Técnica o Dinámica a utilizar, así como la forma de organización de los estudiantes**	**Recurso / Materiales / Guías**
Inicio (5 min)	**Motivación:** El estudiante nombra un país que empiece con la inicial de su nombre, en el caso que con su nombre no hay país alguno entonces comienza con la letra inicial de su apellido paterno; sino materno.	Lenguaje oral
Utilidad (15 min)	¿Como calcularia la siguiente operación? $\boxed{1234568^2 - 1234567^2}$  Se hacen comentarios del caso y las posibilidades de resolverlo. Luego se menciona el Logro de sesión poniendo énfasis en los casos a estudiar.	Se muestra la imagen a través del multimedia.
Proceso (25 min)	Se plantea la suma y la diferencia del binomio al cuadrado: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ y se dan una serie de ejemplos: $(x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + 3^2 = x^2 + 6x + 9$ $(a - 2)^2 = a^2 - 2(a)(2) + 2^2 = a^2 - 4a + 4$ $(4y + 1)^2 = (4y)^2 + 2(4y)(1) + 1^2 = 16y^2 + 8y + 1$ $(5n - m)^2 = (5n)^2 - 2(5n)(m) + (m)^2 = 25n^2 - 10nm + m^2$ De manera similar se plantea la diferencia de cuadrados: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ Luego se dan ejemplos: $(x+4)(x-4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$ $(2m+3n)(2m-3n) = (2m)^2 - (3n)^2 = 4m^2 - 9n^2$	Ejercicios Explicativos y propuestos de los casos estudiados en el Rally de Problemas. pizarra plumones

	Luego de la modelación, los estudiantes son organizados en equipos de 4 integrantes para que resuelvan los ejercicios del rally de problemas, luego el docente selecciona a un representante de cada grupo para que sustente un ejercicio en la pizarra en el plenario.	
Cierre (10 min)	Ejercicios Reto Los estudiantes de manera individual resolverán un ejercicio reto a fin de verificar el logro de la sesión de aprendizaje. Se les deja una serie de ejercicios como tarea para la siguiente sesión. Al terminar la sesión se les recuerda a los estudiantes que tienen a su disposición videos, ejercicios adicionales en tutoriales de internet.	Se muestra el ejercicio reto a través del multimedia. pizarra plumones

DISEÑO DE CLASE N°2

Nombre del curso: **Matemática I**
Unidad de Aprendizaje: Productos Notables 2
Tema: Suma y Diferencia de un binomio al cubo, identidades de Legendre, Steven, Argand. Identidades adicionales.

Logro de Aprendizaje de la Sesión: Al finalizar la sesión de aprendizaje el estudiante reconoce y aplica conceptos de productos notables en la resolución de ejercicios y problemas sin dificultad.

Fases y Tiempo	Descripción de la Actividad o la Técnica o Dinámica a utilizar, así como la forma de organización de los estudiantes	Recurso / Materiales / Guías
Inicio (5 min)	**Motivación:** El estudiante nombra un objeto que empiece con la inicial de su nombre, en el caso que con su nombre no hay país alguno entonces comienza con la letra inicial de su apellido paterno; sino materno.	Lenguaje oral
Utilidad (15 min)	Se les muestra un vídeo tutorial de autoayuda https://www.youtube.com/watch?v=EeY7ir4-ooE y luego se hacen comentarios del caso y las posibilidades de aplicarlo. Luego se menciona el Logro de sesión poniendo énfasis en los casos a estudiar.	Se muestra a través del video y del multimedia.
Proceso (25 min)	Se plantea la suma y la diferencia del binomio al cubo: $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ $= x^3+3xy(x+y)+y^3$ $(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ $= x^3-3xy(x-y)-y^3$ y se dan una serie de ejemplos: $(x+4)^3 = x^3+3x^2(4)+3x(4)^2+4^3$ $= x^3+12x^2+48x+64$ $x-1)^3 = x^3-3x^2(1)+3x(1)^2-4^3$ $= x^3-3x^2+3x-64$ De manera similar se plantea las identidades de Legendre: $(x+y)^2+(x-y)^2 = 2(x^2+y^2)$ $(x+y)^2-(x-y)^2 = 4xy$	Ejercicios Explicativos y propuestos de los casos estudiados en el Rally de Problemas. pizarra plumones

	Identidad de Steven $$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$ Identidad de Argand $$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$$ Identidades adicionales: $$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$ $$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$ Luego se dan ejemplos: $(x+7)^2+(x-7)^2=2(x^2+7^2)=2x^2+98$ $(x+2)(x-9)=x^2+(2-9)x+(2)(-9)=x^2-7x-18$ $(x^2+11x+11^2)(x^2-11x+11^2)=x^4+(11^2)(x^2)+11^4$ $=x^4+121x^2+14641$ Luego de la modelación, los estudiantes son organizados en equipos de 4 integrantes para que resuelvan los ejercicios del rally de problemas, luego el docente selecciona a un representante de cada grupo para que sustente un ejercicio en la pizarra en el plenario.	
Cierre **(10 min)**	Ejercicios Reto Los estudiantes de manera individual resolverán un ejercicio reto a fin de verificar el logro de la sesión de aprendizaje. Se les deja una serie de ejercicios como tarea para la siguiente sesión. Al terminar la sesión se les recuerda a los estudiantes que tienen a su disposición videos, ejercicios adicionales en tutoriales de internet.	Se muestra el ejercicio reto a través del multimedia. pizarra plumones

DISEÑO DE CLASE N°3

Nombre del curso: **Matemática I**
Unidad de Aprendizaje: Factorización
Tema: Factor común y Agrupación de términos.

Logro de Aprendizaje de la Sesión: Al finalizar la sesión de aprendizaje el estudiante reconoce y aplica el factor común y agrupación de términos en la resolución de ejercicios y problemas sin dificultad.

Fases y Tiempo	Descripción de la Actividad o la Técnica o Dinámica a utilizar, así como la forma de organización de los estudiantes	Recurso / Materiales / Guías
Inicio **(5 min)**	**Motivación:** Se pasa el video cuyo link es: https://www.youtube.com/watch?v=zSKM5rw5KOI Luego, se interactúa con los estudiantes para ver la utilidad de sus aplicaciones.	Lenguaje oral
Utilidad **(15 min)**	Dimensiones de un terreno: El señor Barboza tiene un terreno cuadrado cuyo lado mide *a* unidades y compra dos lotes de igual área, colindantes a los lados del terreno. Además, necesita comprar un predio de 25m^2 para que su terreno total sea cuadrado. ¿Cuál es el área del nuevo terreno? 	Se muestra la imagen a través del multimedia.
Proceso **(25 min)**	Se da la definición de factorización mostrando una serie de ejemplos, como: $(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\boldsymbol{x}+\mathbf{3}) \xrightarrow{\text{multiplicación}} \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}$ $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{3} \xrightarrow{\text{factorización}} (\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})$ Se definen que son los factores primos y se da a conocer los casos de factorización: Factor común monomio $P(x;y)=15x+25y=5(3x+5y)$ $P(x)=abx^2-acx=ax(bx-c)$ Factor común polinomio $(a-2)x^2+(a-2)=(a-2)(x^2+1)$ $y^2(x+y-z)+m^2(x+y-z)=(x+y-z)(y^2+m^2)$	Ejercicios Explicativos y propuestos de los casos estudiados en el Rally de Problemas. pizarra plumones

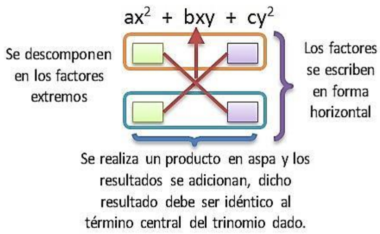
	Agrupación de términos $m^2y^2-7xy^2+m^2z^2-7xz^2=m^2(y^2+z^2)-7x(y^2+z^2)$ $=(y^2+z^2)(m^2-7x)$ Luego de la modelación, los estudiantes son organizados en equipos de 4 integrantes para que resuelvan los ejercicios del rally de problemas, luego el docente selecciona a un representante de cada grupo para que sustente un ejercicio en la pizarra en el plenario.	
Cierre (10 min)	Ejercicios Reto Los estudiantes de manera individual resolverán un ejercicio reto a fin de verificar el logro de la sesión de aprendizaje. Luego de factorizar, indique el número de factores primos de: $P(x)=x^3+x^2+x+1$ Se les deja una serie de ejercicios como tarea para la siguiente sesión. Al terminar la sesión se les recuerda a los estudiantes que tienen a su disposición videos, ejercicios adicionales en tutoriales de internet.	Se muestra el ejercicio reto a través del multimedia. pizarra plumones

DISEÑO DE CLASE N°4

Nombre del curso: **Matemática I**
Unidad de Aprendizaje: Factorización
Tema: Identidades, Sumas y Restas, Aspa Simple

Logro de Aprendizaje de la Sesión: Al finalizar la sesión de aprendizaje el estudiante reconoce y aplica las identidades, sumas, restas y el aspa simple en la resolución de ejercicios y problemas con asertividad.

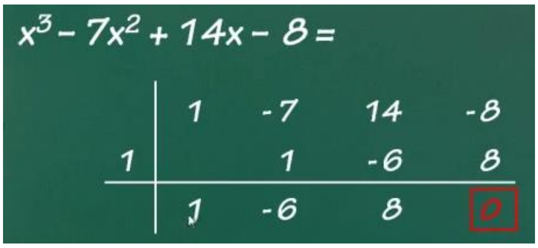
Fases y Tiempo	**Descripción de la Actividad o la Técnica o Dinámica a utilizar, así como la forma de organización de los estudiantes**	**Recurso / Materiales / Guías**
Inicio (5 min)	**Motivación:** Se pasa el video cuyo link es: https://www.youtube.com/watch?v=z8x-Q16cHIc Luego, se interactúa con los estudiantes para ver la utilidad de sus aplicaciones.	Lenguaje oral
Utilidad (15 min)	¿Cuál de los siguientes polinomios està factorizado? 1. $(x^2-1)(x+2)$ 2. $(x-2)(2x+3) + 1$ 3. $3x+5$ 4. $12(x^2+9)(x-4)$ 5. (x^3-8)	Se muestra la imagen a través del multimedia.
Proceso (25 min)	IDENTIDADES Aquí utilizamos los diferentes productos notables ya estudiados. $a^2 – b^2 = (a + b) (a – b)$ $a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 – ab + b^2)$ $a^3 – b^3 = (a – b) (a^2 + ab + b^2)$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 – 2ab + b^2 = (a – b)^2$ Ejemplo: $81x^2 - 36 = 9[(3x)^2 - 2^2] = 9(3x+2)(3x-2)$ $49x^2 - 14x + 1 = (7x-1)^2$	Ejercicios Explicativos y propuestos de los casos estudiados en el Rally de Problemas. pizarra plumones

	Aspa Simple  Ejemplo: Se descomponen convenientemente los factores extremos $\begin{array}{lll} 6x^2+11xy+3y^2 & & \\ 3x & y & \to 2xy \\ 2x & 3y & \to 9xy \\ \hline & & 11xy \end{array}$ Finalmente: $6x^2+11xy+3y^2=(3x+y)(2x+3y)$ Luego de la modelación, los estudiantes son organizados en equipos de 4 integrantes para que resuelvan los ejercicios del rally de problemas, luego el docente selecciona a un representante de cada grupo para que sustente un ejercicio en la pizarra en el plenario.	
Cierre (10 min)	Ejercicios Reto Los estudiantes de manera individual resolverán un ejercicio reto a fin de verificar el logro de la sesión de aprendizaje. Luego de factorizar, indique el número de factores primos de: $P(x)=x^3-x+2x^2-2$ Se les deja una serie de ejercicios como tarea para la siguiente sesión. Al terminar la sesión se les recuerda a los estudiantes que tienen a su disposición videos, ejercicios adicionales en tutoriales de internet.	Se muestra el ejercicio reto a través del multimedia. pizarra plumones

DISEÑO DE CLASE N°5

Nombre del curso: **Matemática I**
Unidad de Aprendizaje: Factorización
Tema: Aplicación de Ruffini y casos particulares.

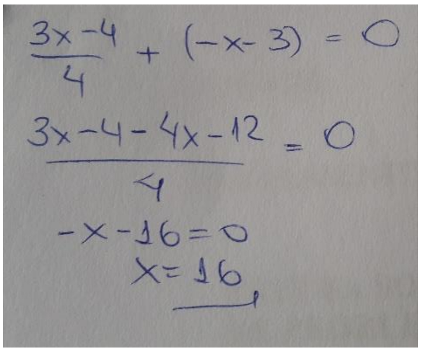
Logro de Aprendizaje de la Sesión: Al finalizar la sesión de aprendizaje el estudiante reconoce y aplica el teorema de Ruffini para factorizar y resolver ejercicios y problemas sin dificultad.

Fases y Tiempo	**Descripción de la Actividad o la Técnica o Dinámica a utilizar, así como la forma de organización de los estudiantes**	**Recurso / Materiales / Guías**
Inicio **(5 min)**	**Motivación:** Se pasa el video cuyo link es: https://www.youtube.com/watch?v=UjuDLYdhp4s Luego, se interactúa con los estudiantes para ver la utilidad de sus aplicaciones.	Lenguaje oral
Utilidad **(15 min)**	¿Como factorizamos el polinomio siguiente? .	Se muestra la imagen a través del multimedia.
Proceso **(25 min)**	Se procede a sustentar la regla de Ruffini que permite localizar las raíces de un polinomio y factorizarlo en binomios de la forma (x-a), siendo "a" un número entero. Por ejemplo: Factorizar $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ El resultado debe ser: $(x+1)(x-3)(x-5)$ Factorizar $x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 12x + 16$ El resultado debe ser: $(x-2)(x-1)(x+2)(x+4)$	Ejercicios Explicativos y propuestos de los casos estudiados en el Rally de Problemas. pizarra plumones

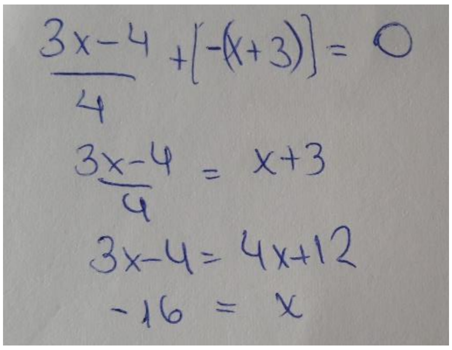
	Luego de la modelación, los estudiantes son organizados en equipos de 4 integrantes para que resuelvan los ejercicios del rally de problemas, luego el docente selecciona a un representante de cada grupo para que sustente un ejercicio en la pizarra en el plenario.	
Cierre (10 min)	Ejercicios Reto Los estudiantes de manera individual resolverán un ejercicio reto a fin de verificar el logro de la sesión de aprendizaje. Se les deja una serie de ejercicios como tarea para la siguiente sesión. Al terminar la sesión se les recuerda a los estudiantes que tienen a su disposición videos, ejercicios adicionales en tutoriales de internet.	Se muestra el ejercicio reto a través del multimedia. pizarra plumones

EVIDENCIAS DE LA INFLUENCIA DE LAS TRANSFORMACIONES ALGEBRAICAS

Problema 1: Se puede observar la corrección al despejar la variable “x”

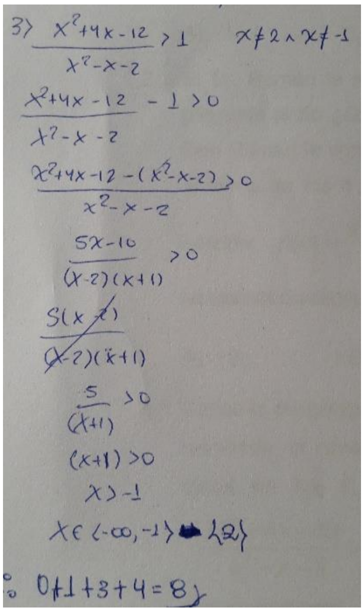


(pre test)

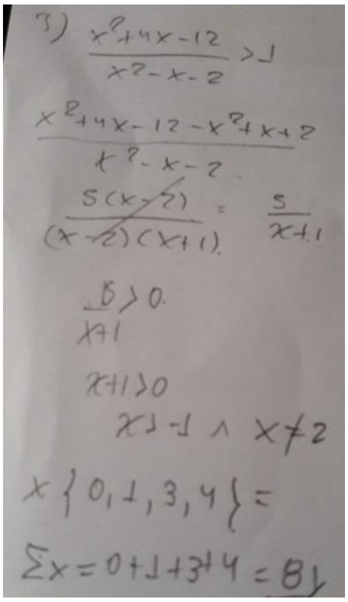


(post test)

Problema 3: Se puede observar la optimización del proceso de resolución con el uso de las transformaciones algebraicas.

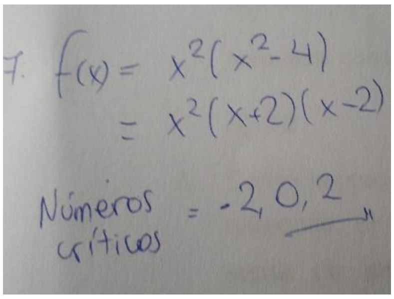


(pre test)

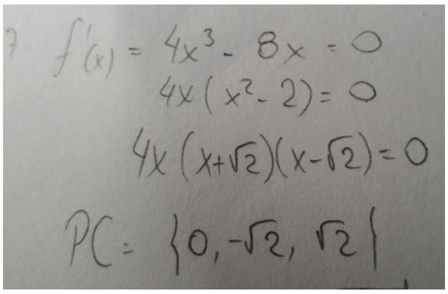


(post test)

Problema 7: Se observa con claridad la influencia de las transformaciones algebraicas (primero se debe derivar para determinar puntos críticos).

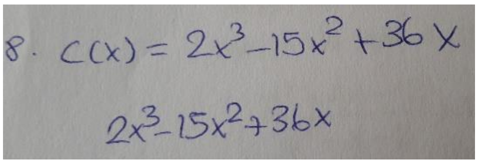


(pre test)

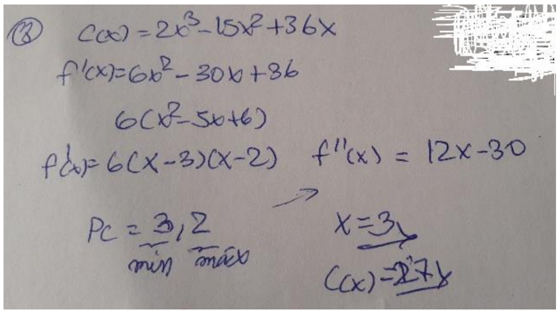


(post test)

Problema 8: Se observa con claridad la influencia de las transformaciones algebraicas en la determinación del valor máximo.

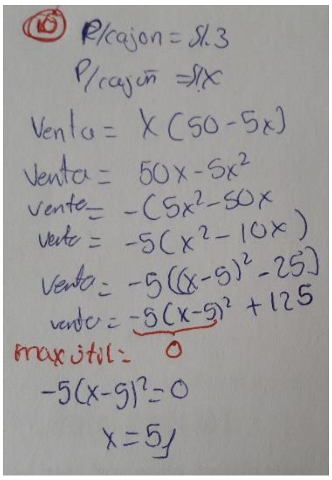


(pre test)

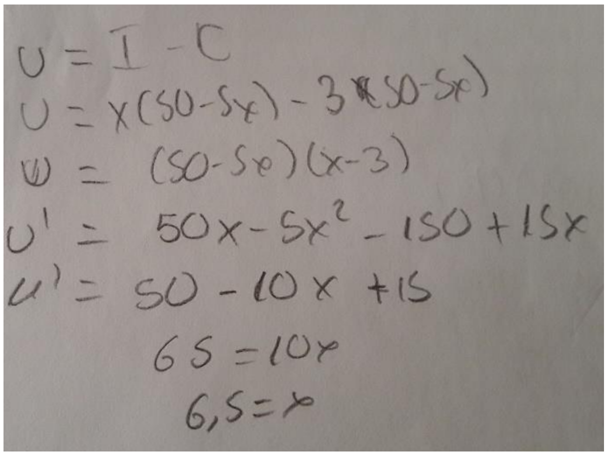


(post test)

Problema 10: Se observa con claridad la influencia de las transformaciones algebraicas en la determinación del valor máximo.



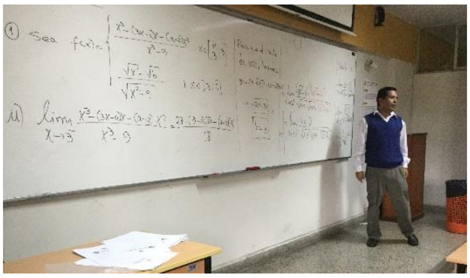
(pre test)

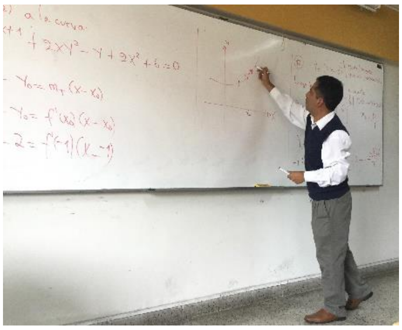


(post test)

EVIDENCIAS FOTOGRÁFICAS DE LA INVESTIGACIÓN

Aplicando las transformaciones algebraicas en la FISI UNMSM



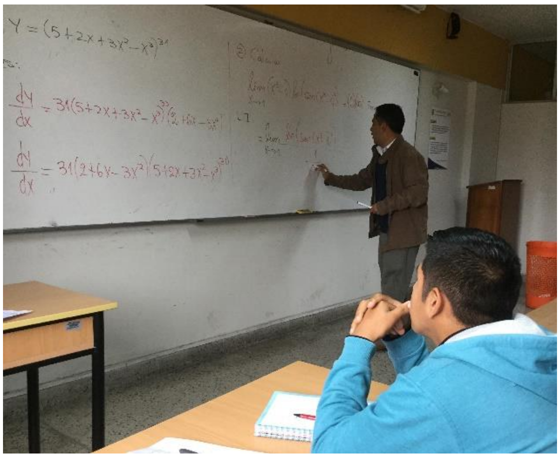


En plena evaluación de la investigación

El Investigador Luis Barboza con el docente titular

Estudiantes en plena resolución de la evaluación

Instruyendo a los estudiantes en el uso de transformaciones



MATRIZ DE COHERENCIA INTERNA

Título	Definición del Problema	Objetivos	Formulación de Hipótesis	Clasificación de variables	Definición Operacional	Metodología	Población, Muestra y Muestreo	Instrumento
"Aplicación de las transformaciones algebraicas en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la UNMSM"	**Problema principal** ¿Cómo Influyen la aplicación de las transformaciones algebraicas en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la UNMSM? **Problema Específico 1** ¿Cómo Influyen la aplicación de los productos notables en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la UNMSM?	**Objetivo general** Determinar la influencia de la aplicación de las transformaciones algebraicas en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la UNMSM. **Objetivos Específico 1** Determinar la influencia de los productos notables en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la UNMSM.	**Hipótesis Principal** El uso de las transformaciones algebraicas influye positivamente en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la UNMSM. **Hipótesis Específica 1** El uso de los productos notables influye positivamente en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e	**Variable Independiente:** Aplicación de las transformaciones Algebraicas. **Variable Dependiente:** Logro de aprendizaje de cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la UNMSM	**Productos Notables** ✓ Efectúa adecuadamente un producto notable. ✓ Comprende el significado de una multiplicación rápida. ✓ Usa las técnicas asertivamente los productos notables **Racionalización** ✓ Determina correctamente la racionalización del denominador de la fracción. ✓ Calcula adecuadamente cualquier caso de racionalización. ✓ Resuelve con asertividad la transformación de la expresión algebraica **Factorización**	El **nivel** de investigación es el experimental y el tipo es aplicado, pues busca confrontar la teoría con la realidad. El **enfoque** es cuantitativo debido a que la metodología se fundamenta en la construcción y medición de indicadores e índices de variables y los datos deben responder a estos factores, por lo cual tendrán validez si son verificables o no, lo cual quiere decir que deben ser observados y contrastados de alguna forma El **diseño** de la investigación es el pre-experimental con pre-test y pos-	**No probabilístico.** La Población estará conformada por 40 estudiantes del aula 102 de la FISI-UNMSM. La muestra es la totalidad de los estudiantes del aula 102, siendo el único grupo experimental (40 estudiantes). La muestra poblacional es de tipo no probabilístico intencional	Para el estudio se ha utilizado una prueba que fue **validada** por los doctores Isidoro Ruiz Arango y Marcos Medina Martínez y la Maestra Mónica Sotomayor Huamán. Se determinó una **confiabilidad** de 0,832 a través del Coeficiente de Alfa de Cronbach.

	Problema Específico 2 ¿Cómo Influyen la aplicación de la racionalización en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la UNMSM? **Problema Específico 3** ¿Cómo Influyen la aplicación de la factorización en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la UNMSM?	**Objetivos Específico 2** Determinar la influencia de la racionalización en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la UNMSM. **Objetivos Específico 3** Determinar la influencia de la factorización en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la UNMSM.	Informática de la UNMSM. **Hipótesis Específica 2** El uso de la racionalización influye positivamente en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la UNMSM. **Hipótesis Específica 3** El uso de la factorización influye positivamente en el logro de aprendizaje del cálculo I en los estudiantes del I ciclo de la Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática de la UNMSM.		✓ Determina el número de factores primos de un producto. ✓ Calcula el número de factores de un producto con asertividad. ✓ Utiliza adecuadamente las técnicas de la factorización **Aprendizaje del cálculo** ✓ Números Reales ✓ Límites de una función ✓ Continuidad de un punto de una función ✓ Derivada de una función ✓ Aplicaciones de la derivada. ✓ Nivel avanzado ($17 \leq$ nota ≤ 20) ✓ Nivel medio ($13 \leq$ nota ≤ 16) ✓ Nivel básico ($9 \leq$ nota ≤ 12) ✓ Nivel deficiente (nota ≤ 8)	test con un solo grupo. Una vez definido el grupo experimental, se administra la aplicación del pre-test; luego el grupo recibe el tratamiento experimental basado en las transformaciones algebraicas. Por último, se les administra, también el pos test. Este diseño se diagrama como sigue: $G: O_1 \xrightarrow{X} O_2$		

Universidad
Inca Garcilaso de la Vega
Nuevos Tiempos. Nuevas Ideas

ESCUELA DE POSGRADO

VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

Después de revisado el instrumento, es valiosa su opinión acerca de lo siguiente:

Menos de	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**
1.¿ En qué porcentaje estima Usted que con esta prueba se logrará el objetivo propuesto?	( )	( )	( )	( )	( )	(X)
2. ¿En qué porcentaje considera que las preguntas están referidas a los conceptos del tema?	( )	( )	( )	( )	( )	(X)
3. ¿Qué porcentaje de las interrogantes planteadas son suficientes para lograr los objetivos?	( )	( )	( )	( )	(X)	( )
4. En qué porcentaje, las preguntas de la prueba son de fácil comprensión?	( )	( )	( )	( )	(X)	( )
5. ¿Qué porcentaje de preguntas siguen secuencia lógica?	( )	( )	( )	( )	( )	(X)
6. ¿En qué porcentaje valora Usted que con esta prueba se obtendrán datos similares en otras muestras?	( )	( )	( )	( )	(X)	( )

SUGERENCIAS

1. ¿Qué preguntas considera Usted deberían agregarse?

Ninguna

2. ¿Qué preguntas estima podrían eliminarse?

Ninguna

3. ¿Qué preguntas considera deberán reformularse o precisarse mejor?

Ninguna

Dr. Isidoro Ruiz Arango
27/04/17

Universidad
Inca Garcilaso de la Vega
Nuevos Tiempos. Nuevas Ideas

ESCUELA DE POSGRADO

VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

Después de revisado el instrumento, es valiosa su opinión acerca de lo siguiente:

Menos de	50	60	70	80	90	100
1.¿ En qué porcentaje estima Usted que con esta prueba se logrará el objetivo propuesto?	( )	( )	( )	( )	(X)	( )
2. ¿En qué porcentaje considera que las preguntas están referidas a los conceptos del tema?	( )	( )	( )	( )	(X)	( )
3. ¿Qué porcentaje de las interrogantes planteadas son suficientes para lograr los objetivos?	( )	( )	( )	(X)	( )	( )
4. En qué porcentaje, las preguntas de la prueba son de fácil comprensión?	( )	( )	( )	(X)	( )	( )
5. ¿Qué porcentaje de preguntas siguen secuencia lógica?	( )	( )	( )	( )	(X)	( )
6. ¿En qué porcentaje valora Usted que con esta prueba se obtendrán datos similares en otras muestras?	( )	( )	( )	( )	( )	(X)

SUGERENCIAS

1. ¿Qué preguntas considera Usted deberían agregarse?

PARA EL OBJETIVO PROPUESTO, LAS PREGUNTAS PROPUESTAS SON LAS ADECUADAS, POR LOTANTO NO HACE FALTA AGREGAR ALGUNA.

2. ¿Qué preguntas estima podrían eliminarse?

NINGUNA, LAS FORMULADAS PUEDEN LOGRAR EL OBJETIVO PROPUESTO.

3. ¿Qué preguntas considera deberán reformularse o precisarse mejor?

NINGUNA, TUVO UN FILTRO PREVIO.

Fecha: 27 DE ABRIL DEL 2017

Validado por: Dr. ANTONIO MARCOS MEDINA MARTÍNEZ

Firma:

Universidad
Inca Garcilaso de la Vega
Nuevos Tiempos. Nuevas Ideas

ESCUELA DE POSGRADO

VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

Después de revisado el instrumento, es valiosa su opinión acerca de lo siguiente:

	Menos de 50	60	70	80	90	100
1.¿ En qué porcentaje estima Usted que con esta prueba se logrará el objetivo propuesto?	( )	( )	( )	( )	(X)	( )
2. ¿En qué porcentaje considera que las preguntas están referidas a los conceptos del tema?	( )	( )	( )	( )	( )	(X)
3. ¿Qué porcentaje de las interrogantes planteadas son suficientes para lograr los objetivos?	( )	( )	( )	( )	(X)	( )
4. En qué porcentaje, las preguntas de la prueba son de fácil comprensión?	( )	( )	( )	( )	( )	(X)
5. ¿Qué porcentaje de preguntas siguen secuencia lógica?	( )	( )	( )	( )	(X)	( )
6. ¿En qué porcentaje valora Usted que con esta prueba se obtendrán datos similares en otras muestras?	( )	( )	( )	( )	( )	(X)

SUGERENCIAS

1. ¿Qué preguntas considera Usted deberían agregarse?
Ninguna.

2. ¿Qué preguntas estima podrían eliminarse?
Ninguna, las preguntas son las adecuadas.

3. ¿Qué preguntas considera deberán reformularse o precisarse mejor?
Ninguna, las preguntas fueron revisadas previamente.

Fecha: 27 DE ABRIL DE 2017

Validado por: Maestro Mónica Janet Sotomayor Huamán

Firma: Mónica Sotomayor H.